APPLICAZIONI LINEARI

1. Calcolare i seguenti prodotti tra matrici:

$$A=\begin{pmatrix} 6 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 4 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} 1/2 & 4 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{pmatrix},$$

$$C=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}, \qquad D=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. Sia f: $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ l'applicazione lineare definita da f(x,y) = (x-y , 2x+3y , y). Dopo aver verificato che f è lineare, trovare la matrice associata ad f.

3. Trovare l'espressione esplicita del nucleo e la sua dimensione, per ciascuna delle seguenti applicazioni lineari:

$$f: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3,\ f(x,y,z) = (-y , x , 0) ;$$
$$g: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^4,\ g(x,y) = (x-y , x , 2x+3y , -y) ;$$
$$h: \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4,\ h(x,y,z,t) = (x-2y , x-2z , y+t , x+2t) ;$$

4. Sia data la matrice dell'applicazione lineare f: $\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$,

$$M=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calcolare f(5,0,3) , f(1,2,-1) e f(-4,1/2,-1) senza ricavare l'espressione esplicita della f.

5. Sia f: $\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^4$ l'applicazione lineare definita da f(a,b,c) = (a+b , b-c , a+c , 2a+b+c). Calcolare dim(im(f)), dim(ker(f)). Verificare se f è iniettiva, suriettiva e se è un isomorfismo.

6. Sia W il sottospazio di $\mathbf{R}^3$ generato dai vettori v=(-1,-1,-1) , w=(0,-2,-1) , z=(1,-1,0). Trovare un'applicazione lineare f: $\mathbf{R}^5 \to \mathbf{R}^3$ tale che im(f)=W.

7. Sia dato l'isomorfismo di $\mathbf{R}^3$ associato alla matrice

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2/3 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Determinare la matrice associata ad f^{-1}.

8. Siano f: $\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ e g: $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ due applicazioni lineari così definite:

$$f(x,y,z) = (x+y , x+y-z) , \qquad g(r,s) = (3r-s , 3s-r , r) .$$

Calcolare l'applicazione lineare gf in forma esplicita e costruirne la matrice. Verificare poi, calcolando le matrici M(f) e M(g) , che M(gf) = M(g) M(f).

9. Sia f: $\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'applicazione lineare definita nel seguente modo: $f(e_1) = (2,2,2)$, $f(e_2) = (3,0,-3)$ e $f(e_3) = (1,-1,k)$, dove e_i è l'i-esimo elemento della base canonica e k è un numero reale. Per quali valori di k, f è iniettiva? Per quali suriettiva? Per quali k infine f è un isomorfismo?

10. Trovare due applicazioni lineari distinte f,g: $\mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^3$ tali che f(1,0,0,0) = g(1,0,0,0) = (2,-1,-2), con f suriettiva e g non suriettiva.

QUIZ

1) Siano $A \in \mathbf{R}^{n,n}$, $B \in \mathbf{R}^{n,m}$:

   a) se n=m allora AB=BA;
   b) se n=m allora AB è simmetrica;
   c) BA è quadrata di ordine n;
   d) $AB \in \mathbf{R}^{n,m}$.

2) Sia $A \in \mathbf{R}^{n,m}$ e $B={}^{T}A$:

   a) $AB \in \mathbf{R}^{m,m}$;
   b) AB non è simmetrica ;
   c) AB esiste se e solo se m=n;
   d) ${}^{T}(AB) = {}^{T}BB$.

3) Una matrice $A \in \mathbf{R}^{3,4}$ di rango 2 rappresenta un'applicazione lineare f:

   a) iniettiva;
   b) avente dim(ker(f)) = 1 e dim(im(f)) = 1;
   c) avente dim(im(f)) = 2 e dim(ker(f)) = 2;
   d) avente dim(ker(f)) = 1 e dim(im(f)) = 2.

4) L'applicazione f: $\mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^2$ definita da f(x,y,z) = (-x , x+y+z):

   a) è un isomorfismo;
   b) non è lineare;
   c) è suriettiva;
   d) ha come matrice associata $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

5) L'inversa della matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   è:

   a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;
   b) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;
   c) $\frac{1}{8}\begin{pmatrix} -1 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & -8 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$;
   d) $\frac{1}{8}\begin{pmatrix} -1 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & -4 \end{pmatrix}$.

6) Siano f(x,y) = (x, x+y , x-y) e g(r,s,t) = (r+s , r+t). Il nucleo dell'applicazione lineare gf:

a) ha dimensione pari a dim(ker(g));
b) ha dimensione 0;
c) ha dimensione 2;
d) ha dimensione pari a dim(im(f)).

7) Un'applicazione lineare f: $\mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^2$ è:

a) un isomorfismo per ogni n;
b) un'applicazione lineare iniettiva solo se n>1;
c) un'applicazione suriettiva per n=1;
d) nessuna delle precedenti.

8) Sia f: $\mathbf{R}^4 \rightarrow \mathbf{R}^4$ un'applicazione lineare tale che f(1,1,1,1) = f(1,0,1,0) = f(0,1,0,1). Allora:

a) ker(f) ha necessariamente dimensione 2;
b) f è suriettiva;
c) (1,0,1,0) appartiene al nucleo di f;
d) nessuna delle precedenti.

9) Una matrice di rango 4 con 5 righe e 6 colonne:

a) appresenta un'applicazione lineare. con nucleo di dimensione 1=5-4;
b) non rappresenta mai un'applicazione lineare iniettiva;
c) rappresenta un'applicazione lineare con nucleo di dimensione 1=6-5;
d) rappresenta un'applicazione lineare con immagine di dimensione 1.

10) Siano f: $\mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^2$ e g: $\mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$ due applicazioni lineari. Allora:

a) gf = fg;
b) fg è necessariamente suriettiva;
c) im(f) coincide con ker(g);
d) nessuna delle precedenti risposte è corretta.