AUTOVALORI E AUTOVETTORI

1) Sia f l'applicazione lineare f:$\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ definita da f(x,y,z) = (x+2y+z, y+z, x+2z) determinare gli autovalori di f.

2) Sia f l'applicazione lineare f:$\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ definita da f(x,y,z) = (x+2y+z, y, x+4y+z) determinare gli autovalori di f e trovare una base di $\mathbf{R}^3$ formata da autovettori di f.

3) Sia f l'endomorfismo di $\mathbf{R}^3$ avente per matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & -2 & -2 \\ -4 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

1) Determinare gli autovalori di f e le rispettive molteplicità.
2) Determinare gli autospazi di f e trovare, se esiste, una base F di $\mathbf{R}^3$ formata da autovettori di f.

4) Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

é diagonalizzabile?

5) Sia f l'endomorfismo di $\mathbf{R}^4$ avente per matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1) Determinare gli autovalori di f e le rispettive molteplicità.
2) Determinare gli autospazi di f e trovare, se esiste, una base F di $\mathbf{R}^3$ formata da autovettori di f.

6) Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

è diagonalizzabile?

7) Provare che

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

é diagonalizzabile e trovare tutte le matrici diagonali simili ad A, precisando, per ciascuna di esse, la matrice P che la diagonalizza.

8) Siano dati $v_1 = (0,1,-1)$, $v_2 = (3,2,1)$, $v_3 = (1,-2,1)$.

1) Provare che esiste un unico endomorfismo f di $\mathbf{R}^3$ avente v_1 ,v_2, v_3 come autovettori associati, rispettivamente agli autovalori 0,-1,0. Dire se f é semplice.
2) Determinare ker(f) e im(f).
3) Determinare M(f).

9) Trovare un endomorfismo f di $\mathbf{R}^2$ avente autovalori 1,2 e tale che f(1,0) = (0,1)

QUIZ

1. Sia f un endomorfismo di $\mathbf{R}^2$ avente (2, 3) e (0, 1) come autovettori e tale che f(4, 3) = (8, 3):

a) f non è semplice;
b) f ha autovalori 2,3;
c) $p(T) = T^2 + 3T + 2$ è il polinomio caratteristico di f;
d) f(2, 3) = (-1, -1).

2. Sia f un endomorfismo di $\mathbf{R}^2$ avente come autovalori 1, -1:

a) Se v è un autovettore associato all'autovalore 1, allora -v è un autovettore associato all'autovalore -1;
b) f^n , per $n \geq 2$, è l'applicazione identica;
c) f è invertibile e $f^{-1} = f$;
d) f non è invertibile.

3. Sia f un endomorfismo di $\mathbf{R}^4$ avente gli autovalori -5, 6, 3, 2. Allora $f^2 = f o f$:

a) é un endomorfismo semplice;
b) ha l'autovalore 3;
c) ha l'autovalore nullo;
d) non é iniettivo.

4. Data $f:\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ definita da f(x,y,z) = (x+y, y+z, z+x). Allora:

a) (1,0,0) é un autovettore;
b) (1,1,0) é un autovettore;
c) 2 è un autovalore;
d) 0 é un autovalore.

5. Data la seguente matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -6 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}:$$

a) A non é diagonalizzabile;

b) la matrice diagonale simile ad A é

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix};$$

c) l'endomorfismo avente come matrice A ammette autovalori con molteplicità maggiore di 1;
d) un autovettore associato all'autovalore 1 é (8,0,0).

6. Sia f un endomorfismo di tale che f(1,2) = (2,4) e f(2,-1) = (2,-1):

a) f non é semplice;
b) gli autovalori di f sono 3 e 1;
c) f(5,0) = (6,2);
d f(5,0) = (6,3).

7. Sia $p(T) = (T-2)^2(T-1)$ il polinomio caratteristico di f:

a) f é sempre semplice;
b) ker f = (1,1,1);
c) esiste un vettore v tale che f(v) = -v;
d) il rango di (M(f)-I) = 2.

8. Sia $p(T) = T^3+T^2+T$ il polinomio caratteristico di f:

a) det(M(f)) = 1;
b) f é iniettivo;
c) f é suriettivo;
d) nessuna delle precedenti risposte é vera.

9. Sia

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}:$$

a) $A^{12}=\begin{pmatrix} 1 & 6^{12} \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$;
b) $A^{12}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;
c) $A^{12}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;
d) $A^{12}=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.