SPAZI VETTORIALI

1. Dire se $V=\{(0, a, a^2) \mid a\in \mathbf{R}\}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^3$.

2. Sia $V= \mathbf{R}^3$. Dire quali dei seguenti sottoinsiemi di V sono suoi sottospazi:

$$V_1=\{ (a, a, a) \mid a\in \mathbf{R}\} ,$$
$$V_2=\{ (a, b, a) \mid a,b\in \mathbf{R}\} ,$$
$$V_3=\{ (a, 2a, a+b) \mid a,b\in \mathbf{R}\} ,$$
$$V_4=\{ (a, b, c) \mid a,b,c\in \mathbf{N} \} ,$$
$$V_5=\{ (a, b, a+b) \mid a,b\in \mathbf{Q} \} .$$

3. In $\mathbf{R}^3$ si considerino i vettori $v_1=(1,0,1)$, $v_2=(0,1,1)$, $v_3=(1,1,-1)$, $v_4=(2,1,-1)$ ed i due sottospazi

$$W_1=L (v_1, v_2) , \qquad W_2=L (v_3, v_4) .$$

Esistono in $\mathbf{R}^3$ vettori non nulli che appartengono sia a W_1 che a W_2?

4. Sia $V=\mathbf{R}^4$, e siano $v_1=(1,0,0,0)$, $v_2=(1,3,-5,0)$, $v_3=(3,2,-1,1)$, $v_4=(1,1,0,0)$.
   1) Verificare che $V=L (v_1, v_2, v_3, v_4)$.
   2) Dedurre da 1) che (v_1, v_2, v_3, v_4) è una base di V.
   3) Trovare le componenti di $w=(0,0,1,0)$ rispetto alla base (v_1, v_2, v_3, v_4).

5. Siano dati in $\mathbf{R}^4$ i vettori $v_1=(1,0,1,0)$, $v_2=(2, h, 2, h)$, $v_3=(1, 1+h, 1, 2h)$ e sia $W=L (v_1, v_2, v_3)$.
   1) Trovare dimW e una base di W al variare di h.
   2) Scelto un valore di h per cui v_1, v_2, v_3 sono linearmente indipendenti, completare l'insieme $\{v_1, v_2, v_3\}$ad una base di $\mathbf{R}^4$.

6. Siano $V=\mathbf{R}^4$, $V_1=\{ (a, 0, c, d) \mid a,c,d\in \mathbf{R}\}$, $V_2=\{ (p, q, q, r) \mid p,q,r\in \mathbf{R}\}$.
   1) Dimostrare che V_1 e V_2 sono sottospazi di V e trovare una base di V_1 e una base di V_2.
   2) Trovare una base di $V_1\cap V_2$.
   3) Calcolare V_1+V_2 e trovarne una base.

7. Siano $V=\mathbf{R}^4$, $v_1=(1,1,1,0)$, $v_2=(1,2,0,-1)$, $v_3=(0,-1,1,1)$, $v_4=(1,0,-1,3)$, $v_5=(3,3,0,2)$. Sia poi $W=L (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$.
   1) Trovare dimW.
   2) Trovare una base $B \subseteq \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ di W.
   3) Verificare che $v_6=(2,2,-1,2) \in W$ e determinarne le componenti rispetto alla base B.
   4) Completare B ad una base C di V e trovare le componenti di v_6 rispetto a C.

8. Dire per quali $h\in \mathbf{R}$ i vettori (0, 1, 1-h, 0), (-h, 1, 0, 0), (1, 0, 0, 1), (0, 4, 0, 0) formano una base di $\mathbf{R}^4$.

9. Ridurre la matrice

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ h & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2-h & 2 & 1 \\ 1-h & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e discuterne il rango al variare di $h\in \mathbf{R}$.

10. Dati $v_1=(1,-2,3,0)$, $v_2=(2,-2,2,-1)$, $v_3=(0,1,4,-5)$.

1) Verificare che (v_1, v_2, v_3) è un insieme libero.
2) Completare (v_1, v_2, v_3) ad una base $B=(v_1, v_2, v_3, v_4)$ di $\mathbf{R}^4$.
3) Trovare le componenti di $w=(0,1,7,3)$ rispetto a B.
4) Estrarre una base B' diversa da B dall'insieme (v_1, v_2, v_3, v_4, w).

QUIZ

1. Dati $v_1=(0,2,3,6)$, $v_2=(1,0,3,0)$, $v_3=(0,5,0,2)$:

a) $\{v_1, v_2, v_3\}$ è un insieme libero in $\mathbf{R}^4$;
b) v_1, v_2, v_3 sono linearmente dipendenti;
c) v_1, v_2, v_3 generano $\mathbf{R}^4$;
d) nessuna delle risposte precedenti è corretta.

2. Data la matrice

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}:$$

a) A ha rango 2;
b) A ha rango 3 se ridotta per righe, 2 se ridotta per colonne;
c) le colonne di A sono linearmente dipendenti;
d) le righe di A sono linearmente indipendenti.

3. Date

$$A=\begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 7 & 2 & -3 \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}:$$

a) $\rho(A)=\rho(B)=2$;
b) $\rho(B)=\rho(AB)=2$;
c) $\rho(A)=\rho(AB)=3$;
d) $\rho(A)=2$.

4. Dato $W=\{ (x, x, x+y, y) \mid x,y\in \mathbf{R}\}$:

a) W è un sottospazio di $\mathbf{R}^3$;
b) W non è un sottospazio;
c) dimW=4;
d) nessuna delle risposte precedenti è corretta.

5. Siano $v_1=(1, 0, h)$, $v_2=(3, -h, 2)$, $v_3=(0, h, 2)$, con $h\in \mathbf{R}$:

a) (v_1, v_2, v_3) è una base di $\mathbf{R}^3$ per ogni h;

b) per $h=0$ v_1, v_2, v_3 sono linearmente indipendenti;
c) per $h\neq 0,4/3$ $\{ v_1, v_2, v_3\}$ è un insieme libero;
d) per $h=2/3$, v_1, v_2, v_3 sono linearmente dipendenti.

6. Dato un insieme E di 5 vettori non nulli di $\mathbf{R}^3$:

a) da E si può sempre estrarre un insieme libero di vettori di $\mathbf{R}^3$;
b) da E si può sempre estrarre una base di $\mathbf{R}^5$;
c) E si può completare ad una base di $\mathbf{R}^3$;
d) E è una base di $\mathbf{R}^3$.

7. Sia $V=\mathbf{R}^2$:

a) $W=\{ (a, 2a) \mid a\in \mathbf{R}\}$ è sottospazio di V;
b) $W=\{ (1, a) \mid a\in \mathbf{R}\}$ è sottospazio di V;
c) $W=\{ (a, a^2) \mid a\in \mathbf{R}\}$ è sottospazio di V;
d) $W=\{ (a+b+c, 2a+3b+c) \mid a,b,c\in \mathbf{R}\}$ non è sottospazio di V.

8. In $\mathbf{R}^4$ siano $V=\{ (a, b, c, a) \mid a,b,c\in \mathbf{R}\}$, $W=\{ (x, y, x, 0) \mid x,y\in \mathbf{R}\}$:

a) $\dim V=\dim W=3$;
b) $\dim(V\cap W)=1$;
c) V ha per base ((1,0,0,1), (0,2,0,0), (0,0,0,0));
d) V è contenuto in W.

9. Siano $v_1, v_2, v_3\in \mathbf{R}^4$:

a) se v_1, v_2, v_3 sono linearmente indipendenti allora generano $\mathbf{R}^4$;
b) se v_1, v_2, v_3 sono linearmente indipendenti allora sono una base di $\mathbf{R}^4$;
c) $\mathbf{R}^3 = L (v_1, v_2, v_3)$;
d) se v_1, v_2, v_3 sono linearmente indipendenti allora costituiscono un insieme completabile a base di $\mathbf{R}^4$.

10. Siano $v_1=(0,1,2)$, $v_2=(3,0,1)$, $v_3=(6,2,6)$, $v_4=(0,0,3) \in \mathbf{R}^3$:

a) (v_1, v_2, v_3, v_4) sono linearmente indipendenti;
b) (v_1, v_2, v_3) è una base di $\mathbf{R}^3$;
c) (v_1, v_3, v_4) è una base di $\mathbf{R}^3$;
d) (v_1, v_2) è una base di $\mathbf{R}^2$.