SPAZI VETTORIALI E MATRICI

Esercizi

Esercizio 1. Sia $V := \mathbb{R}^3$. Stabilire quale dei seguenti sottoinsiemi di V sono suoi sottospazi:

$$\begin{gathered}
V_1 := \{\ (a, a, a) \in V \mid a \in \mathbb{R}\ \},\\
V_2 := \{\ (a, b, a) \in V \mid a, b \in \mathbb{R}\ \},\\
V_3 := \{\ (a, 2a, a + b) \in V \mid a, b \in \mathbb{R}\ \},\\
V_4 := \{\ (a, b, c) \in V \mid a, b, c \in \mathbb{N}\ \},\\
V_5 := \{\ (a, b, a + b) \in \mathbb{Q} \mid a, b \in \mathbb{Q}\ \}.
\end{gathered}$$

Svolgimento. Ricordo che per verificare se $V_i \subseteq V$ è sottospazio è sufficiente verificare se:

i) $0_V \in V_i$;
ii) $\alpha v \in V_i$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\forall v \in V_i$;
iii) $v + w \in V_i$, $\forall v, w \in V_i$.

Iniziamo a studiare V_1. Allora i) è soddisfatta se $a = 0$. Poi

$$\alpha(a, a, a) = (\alpha a, \alpha a, \alpha a) \in V_1.$$

Infine

$$(a, a, a) + (a', a', a') = (a + a', a + a', a + a') \in V_1.$$

Passiamo a V_2. Ancora i) è soddisfatta se $a = b = 0$. Poi

$$\alpha(a, b, a) = (\alpha a, \alpha b, \alpha a) \in V_2.$$

Infine

$$(a, b, a) + (a', b', a') = (a + a', b + b', a + a') \in V_2.$$

Consideriamo V_3. i) è soddisfatta se $a = b = 0$. Poi

$$\alpha(a, 2a, a + b) = (\alpha a, \alpha 2a, \alpha(a + b)) = (\alpha a, 2(\alpha a), a\alpha + \alpha b)) \in V_3.$$

Analogamente

$$(a, 2a, a + b) + (a', 2a', a' + b') = (a + a', 2(a + a'), (a + a') + (b + b')) \in V_3.$$

Concludiamo quindi che V_1, V_2, V_3 sono tre sottospazi.

Studiamo ora l'insieme V_4. Ricordo che $\mathbb{N}$ è l'insieme dei numeri naturali, cioè $\mathbb{N} := \{\ 0,1,2,3,\dots\ \}$, quindi $(0,0,0) \in V_4$. Ma se considero $\alpha \notin \mathbb{N}$ (per esempio $\alpha = -1$), allora $\alpha(a,b,c) \notin V_4$ (infatti $-1,-2,\dots \notin \mathbb{N}$). Quindi V_4 non è un sottospazio.

Infine studiamo l'insieme V_5. Ricordo che $\mathbb{Q}$ è l'insieme dei numeri razionali, cioè di tutte le frazioni p/q ove p,q sono numeri interi relativi e $q \neq 0$. Allora ancora $(0,0,0) \in V_5$, ma se $\alpha \notin \mathbb{Q}$ (per esempio $\alpha = \sqrt{2}$), allora $\alpha(a,b,c) \notin V_5$. Quindi V_5 non è un sottospazio.

Esercizio 2. Sia $V := \mathbb{R}^4$. Stabilire quale dei seguenti sottoinsiemi di V è suo sottospazio:

$$V_1 := \{\ (a,b,c,d) \in V \mid a+b+c+d=0\ \},$$
$$V_2 := \{\ (a,b,c,d) \in V \mid a=2\ \},$$
$$V_3 := \{\ (a,b,c,d) \in V \mid (a,b,c,d) = 2(a',b',c',d'),\ (a',b',c',d') \in V\ \}.$$

Svolgimento. Procediamo come nell'esercizio precedente. Iniziamo da V_1. Allora $(0,0,0,0) \in V_1$ perché $0+0+0+0=0$. Sia $(a,b,c,d) \in V_1$: allora $a+b+c+d=0$, dunque
$$(\alpha a)+(\alpha b)+(\alpha c)+(\alpha d) = \alpha(a+b+c+d) = 0,$$
cioè $\alpha(a,b,c,d) = (\alpha a, \alpha b, \alpha c, \alpha d) \in V_1$. Siano $(a,b,c,d),(a',b',c',d') \in V_1$: allora $a+b+c+d = a'+b'+c'+d' = 0$, dunque
$$(a+a')+(b+b')+(c+c')+(d+d') = (a+b+c+d)+(a'+b'+c'+d') = 0,$$
cioè $(a,b,c,d)+(a',b',c',d') \in V_1$. Concludiamo che V_1 è un sottospazio.

Consideriamo poi l'insieme V_2. Si noti che se $(a,b,c,d) \in V_2$ allora $(a,b,c,d) = (2,b,c,d)$: ne segue che $(0,0,0,0) \notin V_2$ da cui se ne deduce che V_2 non è un sottospazio.

Infine studiamo V_3. Si noti che se $(a,b,c,d) \in V$ allora
$$(a,b,c,d) = 2(a/2,b/2,c/2,d/2)$$
sicché $(a,b,c,d) \in V_3$. Concludiamo che $V = V_3$ e, perciò, V_3 è un sottospazio (banale).

Ovviamente si poteva arrivare a questa conclusione anche verificando le tre condizioni come nei casi precedenti.

Esercizio 3. In $\mathbb{R}^3$ si considerino i vettori
$$v_1 := (1,0,2), \quad v_2 := (3,1,0), \quad v_3 := (0,1,1), \quad v_4 := (5,1,4).$$

Per ciascuna delle seguenti affermazioni si dica se è vera o falsa e perché.

(1) $\mathbb{R}^3 = \mathcal{L}(v_1) + \mathcal{L}(v_2, v_3)$.
(2) $\mathbb{R}^3 = \mathcal{L}(v_1) + \mathcal{L}(v_3, v_4)$.
(3) $\mathbb{R}^3 = \mathcal{L}(v_1, v_2) + \mathcal{L}(v_4)$.

Svolgimento. Iniziamo ad osservare che i vettori v_1, v_2, v_3 sono linearmente indipendenti. Infatti si consideri la relazione di dipendenza lineare $xv_1+yv_2+zv_3 = 0$ cioè, per esteso,

$$x(1,0,2) + y(3,1,0) + z(0,1,1) = 0.$$

Lavorando sulle componenti si ottiene il sistema di equazioni

$$\begin{cases} x + 3y = 0 \\ y + z = 0 \\ 2x + z = 0. \end{cases}$$

Perciò dalla seconda e dalla terza equazione $y = -z$, $x = -z/2$: sostituendo nella prima si verifica $x = y = z = 0$. In particolare abbiamo tre vettori, precisamente v_1, v_2, v_3, linearmente indipendenti in $\mathbb{R}^3$ che quindi generano un sottospazio di dimensione 3: perciò $\mathcal{L}(v_1) + \mathcal{L}(v_2, v_3) = \mathcal{L}(v_1, v_2, v_3) = \mathbb{R}^3$.

Nel secondo caso si può procedere analogamente. Infatti anche v_1, v_3, v_4 sono linearmente indipendenti. Si consideri la relazione $xv_1 + yv_3 + zv_4 = 0$ cioè, per esteso

$$x(1,0,2) + y(0,1,1) + z(5,1,4) = 0.$$

Lavorando sulle componenti si ottiene il sistema di equazioni

$$\begin{cases} x + 5z = 0 \\ y + z = 0 \\ 2x + y + 4z = 0. \end{cases}$$

Dalla prima e dalla seconda equazione $x = -5z$, $y = -z$: sostituendo nella terza si verifica $x = y = z = 0$.

Invece nel terzo caso un calcolo diretto mostra che $2v_1 + v_2 = v_4$, dunque $\mathcal{L}(v_4) \subseteq \mathcal{L}(v_1, v_2)$, quindi $\mathcal{L}(v_4) + \mathcal{L}(v_1, v_2) = \mathcal{L}(v_1, v_2, v_4) = \mathcal{L}(v_1, v_2)$ che quindi, avendo dimensione 2 non può coincidere con $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 4. In $\mathbb{R}^4$ si considerino i vettori

$$v_1 := (1,0,1,0), \quad v_2 := (2,h,2,h), \quad v_3 := (1,1+h,1,2h),$$

e sia $W := \mathcal{L}(v_1, v_2, v_3)$.

(1) Determinare $\dim(W)$ ed una base di W al variare di h.
(2) Scelto un valore di h per cui v_1, v_2, v_3 sono linearmente indipendenti, determinare $v_4 \in \mathbb{R}^4$ in modo tale che (v_1, v_2, v_3, v_4) sia base.

Svolgimento. Per calcolare $\dim(W)$ si deve studiare la lineare indipendenza dei tre vettori v_1, v_2, v_3. Per fare ciò procediamo in due modi diversi. Il primo, più rudimentale, consiste nel risolvere il sistema ottenuto eguagliando a zero le componenti della combinazione lineare $xv_1 + yv_2 + zv_3 = 0$, cioè

$$\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ hy + (1+h)z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \\ hy + 2hz = 0. \end{cases}$$

Si vede subito che prima e terza equazione sono uguali, quindi possiamo ridurci al sistema

$$\begin{cases} x+2y+z=0 \\ hy+(1+h)z=0 \\ hy+2hz=0. \end{cases}$$

Se $h \neq 0$, dalla terza equazione $y=-2z$: sostituendo nella seconda $(1-h)z=0$ dunque, se $h \neq 1$, risulta $z=0$ che implica $x=y=z=0$. Concludiamo che se $h \neq 0,1$, i tre vettori sono linearmente indipendenti.

Se $h=0$ si ha $v_1 := (1,0,1,0)$, $v_2 := (2,0,2,0)$, $v_3 := (1,1,1,0)$, sicchè $\mathcal{L}(v_1,v_2,v_3)=\mathcal{L}(v_1,v_3)$.

Infine se $h=1$ si ha $v_1 := (1,0,1,0)$, $v_2 := (2,1,2,1)$, $v_3 := (1,2,1,2)$, sicchè ancora $\mathcal{L}(v_1,v_2,v_3)=\mathcal{L}(v_1,v_3)$.

In particolare si ricava che:

i) se $h \neq 0,1$, (v_1,v_2,v_3) è base di W, quindi $\dim(W)=3$;
ii) se $h=0,1$, v_1,v_2,v_3 sono linearmente dipendenti ma v_1,v_2 sono linearmente indipendenti, quindi (v_1,v_3) è base di W e $\dim(W)=2$.

Il secondo metodo si basa sul fatto che $\dim(W)=t$ se e solo se

$$\varrho\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & h & 2 & h \\ 1 & 1+h & 1 & 2h \end{pmatrix} = t.$$

Procedendo con operazioni elementari di riga si ottiene

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & h & 2 & h \\ 1 & 1+h & 1 & 2h \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2\to R_2-2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & h & 0 & h \\ 1 & 1+h & 1 & 2h \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3\to R_3-R_1}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & h & 0 & h \\ 0 & 1+h & 0 & 2h \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3\to R_3-R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & h & 0 & h \\ 0 & 1 & 0 & h \end{pmatrix} \xrightarrow{R_4\to R_3-R_2}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & h & 0 & h \\ 0 & h-1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A_h.$$

In particolare

$$\varrho\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & h & 2 & h \\ 1 & 1+h & 1 & 2h \end{pmatrix} = \varrho\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & h & 0 & h \\ 0 & h-1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

da cui si ricava il risultato ottenuto sopra per altra via.

Questo secondo metodo ha il vantaggio di permetterci di dare risposta al secondo quesito immediatamente. Infatti se $h \neq 0,1$, per esempio $h=2$, i vettori v_1,v_2,v_3 sono linearmente indipendenti, infatti

$$\varrho(A_2) = \varrho\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3.$$

Ma si vede subito che scelto $v_4 := (0,0,1,0)$ anche i vettori $v_{1,2}, v_3, v_4$ sono linearmente indipendenti poiché

$$\varrho\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix} = 4.$$

In particolare $(v_{1,2}, v_3, v_4)$ è una base di $\mathbb{R}^4$.

Esercizio 5. Siano

$$V_1 := \{\ (0,a,c,d) \mid a,c,d \in \mathbb{R}\ \}, \qquad V_2 := \{\ (q,p,q,r) \mid p,q,r \in \mathbb{R}\ \}.$$

(1) Verificare che V_1 e V_2 sono sottospazi di $\mathbb{R}^4$ e determinare basi di V_1 e di V_2.
(2) Determinare una base di $V_1 \cap V_2$.
(3) Calcolare $V_1 + V_2$ e determinarne una base.

Svolgimento. Verifichiamo che V_1 è un sottospazio di $\mathbb{R}^4$. Innanzi tutto $(0,0,0,0) \in V_1$. Poi

$$\alpha(0,a,c,d) = (0,\alpha a,\alpha c,\alpha d) \in V_1,$$
$$(0,a,c,d) + (0,a',c',d') = (0+0, a+a', c+c'd+d') \in V_1.$$

Si noti che $e_2 := (0,1,0,0), e_3 := (0,0,1,0), e_4 := (0,0,0,1) \in V_1$ e $(0,a,c,d) = ae_2 + ce_3 + de_4$. L'identità di cui sopra implica anche che (e_2, e_3, e_4) è una base di V_1.

Analogamente osserviamo che $(0,0,0,0) \in V_2$. Poi

$$\alpha(q,p,q,r) = (\alpha q,\alpha p,\alpha q,\alpha r) \in V_1,$$
$$(q,p,q,r) + (q',p',q',r') = (q+q', p+p', q+q', r+r') \in V_1.$$

Definiamo $e = (1,0,1,0)$. Si noti che $e_2, e_4, e \in V_2$ e $(q,p,q,r) = qe + pe_2 + re_4$. Ancora l'identità di cui sopra implica che (e_2, e_4, e) è una base di V_2.

Studiamo $V_1 \cap V_2$. Risulta che $v \in V_1 \cap V_2$ se e solo se è della forma $(0,p,0,r) = (0,a,0,d)$. In particolare $e_2, e_4 \in V_1 \cap V_2$, sono linearmente indipendenti (come osservato sopra) e, per esempio $(0,a,0,d) = ae_2 + de_4$, quindi (e_2, e_3) è base di $V_1 \cap V_2$ che, perciò, ha dimensione 2.

Risulta

$$V_1 + V_2 = \mathcal{L}(e_2, e_3, e_4) + \mathcal{L}(e_2, e_4, e) = \mathcal{L}(e_2, e_3, e_4, e).$$

Si noti che $e_1 = e - e_3$ sicché

$$V_1 + V_2 = \mathcal{L}(e_1, e_2, e_3, e_4) = \mathbb{R}^4.$$

Segue che (e_1, e_2, e_3, e_4) è base di $V_1 + V_2 = \mathbb{R}^4$. Ovviamente anche (e_1, e_2, e_3, e) è una base di $V_1 + V_2 = \mathbb{R}^4$.

Esercizio 6. Siano

$$A := (1, 1, 1, 0), \quad B := (1, 2, 0, -1), \quad C := (0, -1, 1, 1),$$
$$D := (1, 0, -1, 3), \quad E := (3, 3, 0, 2)$$

e $W := \mathcal{L}(A, B, C, D, E)$.

(1) Determinare $\dim(W)$.
(2) Determinare una base $\mathcal{B}$ di W i cui elementi siano in $\{A, B, C, D, E\}$.
(3) Verificare che $F := (2, 2, -1, 2) \in W$ e determinarne le componenti rispetto alla base $\mathcal{B}$.
(4) Completare $\mathcal{B}$ ad una base $\mathcal{C}$ di V e determinare le componenti di F rispetto a $\mathcal{C}$.

Svolgimento. Chiaramente $\dim(W) \leq \dim(\mathbb{R}^4) = 4$. È sufficiente ridurre con operazioni elementari di riga la matrice M d'ordine 5×4 avente per righe i vettori A, B, C, D, E

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \\ 3 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 - R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \\ 3 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 + R_2}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \\ 3 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_4 \to R_4 - R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 3 \\ 3 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_5 \to R_5 - 3R_1}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_4 \to R_4 + R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_5 \to R_5 - R_4}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_4 \leftrightarrow R_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Segue che $\varrho(M) = 3$, sicché $\dim(W) = 3$ e si vede che A, B, D sono linearmente indipendenti, quindi $\mathcal{B} := (A, B, D)$ è una base di W.

Si noti che $F = B + D \in W$. Si conclude che $[F]_{\mathcal{B}} = (0, 1, 1)$. Infine per completare $\mathcal{B} := (A, B, D)$ a base $\mathcal{C} := (A, B, D, G)$ di $\mathbb{R}^4$ è sufficiente aggiungere

$G \notin W$. Poiché la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

è ridotta per righe, basta scegliere $G := e_4$. In tale caso $[F]_{\mathcal{C}} = (0, 1, 1, 0)$.

Quiz

Quiz 1. Dati gli insiemi

$$A := \{\ (a, a, a, a) \mid a \in \mathbb{R}\ \}, \qquad B := \{\ (0, b, b, 0) \mid b \in \mathbb{R}\ \},$$

dire quale delle seguenti affermazioni è vera.

a) $A \cup B$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^4$.
b) $A + B$ non è un sottospazio di $\mathbb{R}^4$.
c) $(1, 1, 1, 1) \notin A + B$.
d) $(1, 2, 2, 1) \notin A + B$.

Svolgimento. Osserviamo preliminarmente che sia A che B sono sottospazi di $\mathbb{R}^{2,2}$.

L'affermazione a) è falsa. Infatti se $ab \neq 0$

$$(a, a, a, a) + (0, b, b, 0) \notin A \cup B.$$

L'affermazione b) è vera. Questo è noto dalla teoria: la somma di due sottospazi è sempre un sottospazio.

L'affermazione c) è falsa. Infatti è noto dalla teoria che $A, B \subseteq A + B$. Quindi $(1, 1, 1, 1) \in A \subseteq A + B$.

L'affermazione d) è falsa. Infatti $(1, 1, 1, 1) \in A$, $(0, 1, 1, 0) \in B$, dunque $(1, 2, 2, 1) = (1, 1, 1, 1) + (0, 1, 1, 0) \in A + B$.

Quiz 2. Siano $V := \mathbb{R}^3$, $W \subseteq V$ il sottospazio avente base $\mathcal{B} := (e_1, e_3)$. Quale delle seguenti affermazioni è vera?

a) Il vettore $(1, 1, 1) \in W$.
b) $e_1 + e_3 \in W$ ed ha componenti $(1, 0, 1)$ rispetto a $\mathcal{B}$.
c) $e_1 + e_3 \in W$ ed ha componenti $(1, 1)$ rispetto a $\mathcal{B}$.
d) $e_1 + e_3 \in W$ ed ha componenti $(1, 1)$ rispetto alla base canonica di V.

Svolgimento. Ricordo che, convenzionalmente, $e_1 := (1, 0, 0)$, $e_2 := (0, 1, 0)$, $e_3 := (0, 0, 1)$. In particolare $W = \{\ (a, 0, c) \in \mathbb{R}^3\ \}$.

L'affermazione a) è falsa. Infatti gli elementi di W hanno la seconda componente nulla.

L'affermazione b) è falsa. Infatti $\mathcal{B}$ è formata da due soli elementi, quindi le componenti di ogni elemento di W rispetto a $\mathcal{B}$ sono solo due.

L'affermazione c) è vera. Infatti $e_1 + e_3 = 1e_1 + 1e_3$.

L'affermazione d) è falsa. Infatti V ha dimensione 3, dunque le componenti di un suo elemento rispetto ad una sua qualsiasi base sono tre. Nel caso particolare, poiché la base canonica di V è $\mathcal{C} := (e_1, e_2, e_3)$, si ha $[e_1 + e_3]_{\mathcal{C}} = [(1, 0, 1)]_{\mathcal{C}} = (1, 0, 1)$.

Quiz 3. Dati gli insiemi

$$A := \{ (a, b, b, c) \mid a, b, c \in \mathbb{R} \}, \qquad B := \{ (a, 0, 0, b) \mid a, b \in \mathbb{R} \},$$

dire quale delle seguenti affermazioni è vera.

a) $A \cap B = \emptyset$.
b) $A \cap B$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^4$ di dimensione 2.
c) $A + B$ contiene quattro elementi linearmente indipendenti.
d) $A \subseteq B$.

Svolgimento. Osserviamo preliminarmente che A e B sono sottospazi.

L'affermazione a) è falsa. Infatti dalla teoria è noto che l'intersezione di due sottospazi è ancora un sottospazio, in particolare è non vuota. Nel caso particolare si verifica facilmente che $B \subseteq A$, dunque $A \cap B = B$.

L'affermazione b) è vera. Infatti segue dall'osservazione che $A \cap B$ che ha dimensione 2 poiché $B = \mathcal{L}(e_1, e_4)$.

L'affermazione c) è falsa. Infatti essendo $B \subseteq A$ segue che $A + B = A$, e si $A = \mathcal{L}(e_1, e_4, e)$ ove $e = (0, 1, 1, 0)$. Quindi $\dim(A + B) = \dim(A) = 3$.

L'affermazione d) è falsa. Chiaramente $e \in A \setminus B$.

Quiz 4. Sia

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ h & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

a) $\varrho(A) = 2$ per ogni $h \neq 0$.
b) A è invertibile per $h = 1/5$.
c) Per ogni h le colonne di A sono una base di $\mathbb{R}^3$.
d) Nessuna delle risposte precedenti è corretta.

Svolgimento. Operando sulle righe della matrice si ha

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ h & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{R_3 \to R_3 - hR_1}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -3h & 1 - 2h \end{pmatrix} \overset{R_3 \to R_3 - 3hR_2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 - 5h \end{pmatrix}.$$

L'affermazione a) è falsa. Infatti se $1 - 5h \neq 0$ risulta $\varrho(A) = 3$.

L'affermazione b) è falsa. Infatti se $h = 1/5$ risulta $1 - 5h = 0$, dunque $\varrho(A) = 2$ e, dalla teoria generale, è noto che una matrice quadrata è invertibile se e solo se ha rango massimo.

L'affermazione c) è falsa. Infatti se $h = 1/5$ (e solo in questo caso), risulta $1 - 5h = 0$, dunque $\varrho(A) = 2$, mentre $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$.

Per esclusione l'affermazione d) risulta essere vera.

Quiz 5. Siano

$$V := \{\ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y - z = 0\ \}, \qquad W := \{\ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = z\ \}.$$

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

a) $V \cap W = \emptyset$.
b) $V \cup W$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^3$.
c) $V + W = \mathcal{L}((1,1,1))$.
d) $\dim(V+W) = \dim(V) + \dim(W)$.

Svolgimento. Osserviamo preliminarmente che $((1,1,0),(1,0,1))$ è una base di V, $((1,1,1))$ una di W.

L'affermazione a) è falsa. Infatti dalla teoria generale è noto che l'intersezione di due sottospazi è ancora un sottospazio, dunque è non vuoto.

L'affermazione b) è falsa. Infatti $(1,1,0)+(1,1,1) = (1,2,2) \notin V, W$, dunque non è nemmeno in $V \cup W$.

L'affermazione c) è falsa. Infatti

$$\dim(V+W) = \dim(\mathcal{L}((1,1,0),(1,0,1),(1,1,1)) = 3.$$

L'affermazione d) è vera. Infatti $\dim(V+W) = 3$, $\dim(V) = 2$, $\dim(W) = 1$.

Quiz 6. Sia

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) A non è invertibile.
b) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
c) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
d) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Svolgimento. Ricordo che una matrice quadrata A di ordine n si dice invertibile se esiste una matrice B tale che $AB = BA$ è la matrice identità di ordine n. Tale matrice B, se esiste, è unica, viene normalmente indicata con A^{-1} e viene detta la matrice inversa di A.

L'affermazione a) è falsa. Infatti è noto dalla teoria che una matrice è invertibile se e solo se ha rango massimo. Poiché A è ridotta per righe è facile verificare che $\varrho(A) = 3$, dunque A è necessariamente invertibile.

L'affermazione b) è falsa. Infatti

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

L'affermazione c) è vera. Infatti

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

L'affermazione d) è falsa. Infatti

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$