CAPITOLO 14

INTEGRALI IMPROPRI O GENERALIZZATI

In questo capitolo vogliamo presentare brevemente la teoria dell'integrazione per funzioni anche non limitate definite in intervalli anche non chiusi e limitati.

§1.*Integrali impropri di 1ª specie.*

Cominciamo con lo studio del problema dell'integrazione delle funzioni definite in intervalli non limitati, dando la seguente definizione

Definizione 1.1. *Sia* $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ *una funzione integrabile secondo Riemann in ogni intervallo* $[a, b]$ *con* $b \in]a, +\infty[$. *La seguente funzione integrale*

$$F(b) = \int_a^b f(x)dx \qquad b \in]a, +\infty[$$

è allora ben definita. Se esiste finito il $\lim_{b\to+\infty} F(b) = L$ *diremo che* f *è integrabile in senso improprio (o generalizzato) in* $[a, +\infty[$ *e porremo, per definizione,*

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = L.$$

Il simbolo $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ si chiama *integrale improprio (o generalizzato) di 1ª specie di* f.

È facile vedere (la dimostrazione viene lasciata al lettore) che se $h_1, h_2 : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ sono integrabili in senso improprio, allora anche $\alpha_1 h_1 + \alpha_2 h_2$ è integrabile in senso improprio, per ogni $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, e si ha

$$\int_a^{+\infty} (\alpha_1 h_1 + \alpha_2 h_2)(x)dx = \alpha_1 \int_a^{+\infty} h_1(x)dx + \alpha_2 \int_a^{+\infty} h_2(x)dx.$$

Dalla Definizione 1.1 e dal Criterio di Cauchy per la convergenza delle funzioni (Capitolo 8) deriva il seguente

Criterio di Cauchy. *Sia* $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ *una funzione integrabile secondo Riemann in ogni intervallo* $[a, b]$ *con* $b \in]a, +\infty[$. f *è integrabile in senso improprio se e solo se per ogni* $\epsilon > 0$ *esiste* $\overline{x} > a$ *tale che per ogni* $c_1, c_2 \in [a, +\infty[$ *con* $c_1 > \overline{x}, c_2 > \overline{x}$, *risulta*

$$\left| \int_{c_1}^{c_2} f(x)dx \right| < \epsilon.$$

Dimostrazione: la dimostrazione viene lasciata al lettore.

Una importante conseguenza del Criterio di Cauchy è il seguente

Primo Teorema di Confronto. *Sia* $f : [a, +\infty[\to [0, +\infty[$ *una funzione integrabile secondo Riemann in ogni intervallo* $[a, b]$ *con* $b \in]a, +\infty[$ *. Sia* $g : [a, +\infty[\to [0, +\infty[$ *una funzione integrabile in senso improprio tale che* $f(x) \leq g(x)$ *per ogni* $x \in [b, +\infty[$ *, essendo* b *un opportuno elemento di* $[a, +\infty[$ *. Allora* f *risulta integrabile in senso improprio in* $[a, +\infty[$ *. Inoltre, si ha*

$$\int_b^{+\infty} f(x)dx \leq \int_b^{+\infty} g(x)dx \qquad (1.1).$$

Dimostrazione. Per il Criterio di Cauchy è sufficiente provare che per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\overline{x} > a$ tale che per ogni $c_1, c_2 \in [a, +\infty[$ con $c_1 > \overline{x}, c_2 > \overline{x}$, risulta $\left|\int_{c_1}^{c_2} f(x)dx\right| < \epsilon$. Per arbitrari $c_1, c_2 \in [b, +\infty[$ si ha

$$\left|\int_{c_1}^{c_2} f(x)dx\right| \leq \left|\int_{c_1}^{c_2} g(x)dx\right|;$$

poiché g è integrabile in senso improprio, dalla condizione necessaria del precedente Criterio di Cauchy segue che fissato $\epsilon > 0$ esiste $\overline{\overline{x}} > a$ tale che $\left|\int_{c_1}^{c_2} g(x)dx\right| < \epsilon$ ogni volta che $c_1, c_2 \in [a, +\infty[$ con $c_1 > \overline{\overline{x}}, c_2 > \overline{\overline{x}}$; per $c_1, c_2 > \overline{x} = \max(b, \overline{\overline{x}})$ si ha allora che

$$\left|\int_{c_1}^{c_2} f(x)dx\right| < \epsilon$$

che è quanto volevamo provare. Dimostriamo adesso la (1.1); a tal fine osserviamo che

$$\int_b^c f(x)dx \leq \int_b^c g(x)dx \leq \int_b^{+\infty} g(x)dx \qquad \forall c > b$$

in quanto la funzione integrale $G(c) = \int_b^c g(x)dx$ risulta non decrescente, poiché $g \geq 0$; poiché anche $F(c) = \int_b^c f(x)dx$ è non decrescente, noti risultati relativi alle funzioni monotòne danno la (1.1).■

Esercizio 1.1. Siano $f, g, h : [a, +\infty[\to R$ tre funzioni integrabili secondo Riemann in ogni intervallo $[a, b]$ con $b \in]a, +\infty[$ tali che $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ per ogni $x \in [a, +\infty[$; supponiamo, inoltre, che f ed h siano integrabili in senso improprio. Provare che g è integrabile in senso improprio.■

In maniera del tutto analoga si dimostra il seguente

Secondo Teorema di Confronto. *Sia* $f : [a, +\infty[\to [0, +\infty[$ *una funzione integrabile secondo Riemann in ogni intervallo* $[a, b]$ *con* $b \in]a, +\infty[$ *, ivi non integrabile in senso improprio. Sia* $g : [a, +\infty[\to [0, +\infty[$ *una funzione integrabile secondo Riemann in ogni intervallo* $[a, b]$ *con* $b \in]a, +\infty[$ *tale che* $f(x) \leq g(x)$ *per* *ogni* $x \in [b, +\infty[$, *essendo* b *un opportuno elemento di* $[a, +\infty[$. *Allora* g *risulta non integrabile in senso improprio in* $[a, +\infty[$. *Inoltre, si ha*

$$\int_b^{+\infty} f(x)dx = \int_b^{+\infty} g(x)dx = +\infty.$$

La dimostrazione, molto semplice, dei seguenti corollari viene lasciata al lettore

Corollario 1.1. *Sia* $f : [a, +\infty[\to [0, +\infty[$ *una funzione integrabile secondo Riemann in ogni intervallo* $[a, b]$ *con* $b \in]a, +\infty[$. *Sia* $g : [a, +\infty[\to [0, +\infty[$ *una funzione integrabile in senso improprio in* $[a, +\infty[$ *tale che* $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L \in \mathbb{R}$ *(ovviamente* $L \geq 0$*). Allora* f *è integrabile in senso improprio.*

Corollario 1.2. *Sia* $f : [a, +\infty[\to [0, +\infty[$ *una funzione integrabile secondo Riemann in ogni intervallo* $[a, b]$ *con* $b \in]a, +\infty[$. *Sia* $g : [a, +\infty[\to [0, +\infty[$ *una funzione non integrabile in senso improprio in* $[a, +\infty[$ *tale che* $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L \in]0, +\infty]$. *Allora* $\int_a^{+\infty} g(x)dx = +\infty$ *ed* f *non è integrabile in senso improprio.*

I Teoremi di Confronto ed i precedenti Corollari vengono solitamente applicati scegliendo la *funzione campione* $g(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ (che risulta integrabile se $\alpha > 1$, non integrabile se $0 \leq \alpha \leq 1$; la dimostrazione viene lasciata al lettore), con α opportuno ed $x \in [a, +\infty[\cap]0, +\infty[$.

Corollario 1.3. *Sia* $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ *una funzione integrabile secondo Riemann in ogni intervallo* $[a, b]$ *con* $b \in]a, +\infty[$. *Sia* $g : [a, +\infty[\to [0, +\infty[$ *una funzione integrabile in senso improprio tale che* $|f(x)| \leq g(x)$ *per ogni* $x \in [a, +\infty[$. *Allora* $|f|$ *risulta integrabile in senso improprio.*

Definizione 1.2. *Sia* $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ *una funzione integrabile secondo Riemann in ogni intervallo* $[a, b]$ *con* $b \in]a, +\infty[$. *Se* $|f|$ *è integrabile in senso improprio si dice che* f *è assolutamente integrabile in senso improprio*

L'assoluta integrabilità è molto importante, perché essa implica l'integrabilità, fatto non vero per la integrabilità secondo Riemann (Osservazione 2.1 del Capitolo 13); per dimostrare l'implicazione annunciata osserviamo che $0 \leq f^+(x) = \frac{|f(x)|+f(x)}{2} \leq |f(x)|$ e $0 \leq f^-(x) = \frac{|f(x)|-f(x)}{2} \leq |f(x)|$, per ogni $x \in [a, +\infty[$, e quindi che la assoluta integrabilità determina l'integrabilità di f^+, f^-, grazie al Criterio di Confronto; per concludere con l'integrabilità di f è allora sufficiente osservare che $f(x) = f^+(x) - f^-(x)$, per ogni $x \in [a, +\infty[$.

È inoltre facile vedere (la dimostrazione viene lasciata al lettore) che, se f è assolutamente integrabile, si ha la seguente disuguaglianza

$$\left| \int_a^{+\infty} f(x)dx \right| \leq \int_a^{+\infty} |f(x)|dx.$$

Esercizio 1.2. Siano $f, g : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ due funzioni integrabili secondo Riemann in ogni intervallo $[a, b]$ con $b \in]a, +\infty[$; supponiamo che f^2, g^2 siano integrabili in senso improprio. Provare che fg è assolutamente integrabile in senso improprio.■

Il seguente esempio prova che esistono funzioni integrabili in senso improprio, ma non assolutamente integrabili

Esempio 1.1. Consideriamo la funzione

$$f(x) = \frac{\sin x}{x} : \left[\frac{\pi}{2}, +\infty\right[\to \mathbb{R};$$

si ha, intanto, integrando per parti

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{b} \frac{\sin x}{x} dx = \left[-\frac{\cos x}{x}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{b} - \int_{\frac{\pi}{2}}^{b} \frac{\cos x}{x^2} dx;$$

poiché $\lim_{b\to+\infty} -\frac{\cos b}{b} = 0$ e $\frac{|\cos x|}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}$ per ogni $x \in \left[\frac{\pi}{2}, +\infty\right[$, si ha l'integrabilità della funzione f in senso improprio (si usi anche il Teorema di Confronto); proviamo adesso che non si ha l'integrabilità assoluta, osservando che (per $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$)

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{n\pi} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx + \sum_{k=1}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx \geq \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx +$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k+1)\pi} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin x| dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2}{(k+1)\pi} \to +\infty \quad \text{se} \quad n \to +\infty;$$

notiamo adesso che la funzione integrale $h(c) = \int_{\frac{\pi}{2}}^{c} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx$ è non decrecente; per noti risultati si ha che $\lim_{c\to+\infty} h(c) = +\infty$, cioé la non assoluta integrabilità della funzione da studiare.■

Esercizio 1.3. Sia $f : [a, +\infty[\to [0, +\infty[$ integrabile in senso improprio tale che esista $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$. Provare che $L = 0$.■

Esercizio 1.4. Sia $f : [a, +\infty[\to [0, +\infty[$ integrabile in senso improprio. Dire se esiste, oppure non esiste, $\lim_{x\to+\infty} f(x)$, giustificando la risposta.■

Il seguente Teorema pone in relazione l'integrabilità in senso improprio con la convergenza di serie numeriche a termini non negativi

Teorema 1.4 (Criterio dell'Integrale). *Sia $\sum a_n$ una serie numerica a termini non negativi e sia $f : [1, +\infty[\to [0, +\infty[$ una funzione non crescente (quindi integrabile secondo Riemann in ogni intervallo $[1, b]$ con $b \in]1, +\infty[$), tale che $f(n) = a_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Allora la serie converge se e solo se $\int_1^{+\infty} f(x)dx \in \mathbb{R}$.*

Dimostrazione. Supponiamo, dapprima, che la serie converga, con somma S, e proviamo che $\int_1^{+\infty} f(x)dx \in \mathbb{R}$. La seguente funzione integrale

$$F(y) = \int_1^y f(x)dx \qquad \forall y \in [1, +\infty[$$

è non decrescente, in quanto f è non negativa per ipotesi (Teorema 3.1 del Capitolo 13); allora esiste il suo limite per $y \to +\infty$. Per acquisire la tesi è sufficiente provare che essa è superiormente limitata in $[1, +\infty[$. A tale fine si ha la seguente catena di disuguaglianze (dove si farà uso della non negatività e della non crescenza di f) valida per ogni $y \in [1, +\infty[$

$$F(y) = \int_1^y f(x)dx \leq \int_1^{[y]+1} f(x)dx = \sum_{i=1}^{[y]} \int_i^{i+1} f(x)dx \leq \sum_{i=1}^{[y]} \int_i^{i+1} f(i)dx =$$

$$\sum_{i=1}^{[y]} f(i) = \sum_{i=1}^{[y]} a_i \leq S.$$

Viceversa, supponiamo che $\int_1^{+\infty} f(x)dx \in \mathbb{R}$ e proviamo la convergenza della serie. A tale fine si ha la seguente catena di disuguaglianze (dove si farà uso della non decrescenza di F e della non crescenza di f come nella prima parte)

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + \sum_{i=2}^{n} f(i) = a_1 + \sum_{i=2}^{n} \int_{i-1}^{i} f(i)dx \leq$$

$$a_1 + \sum_{i=2}^{n} \int_{i-1}^{i} f(x)dx = a_1 + \int_1^n f(x)dx \leq a_1 + \int_1^{+\infty} f(x)dx$$

che prova la limitatezza superiore della successione delle somme parziali della serie data e quindi la sua convergenza.■

Osservazione 1.1. Come nella dimostrazione del precedente Criterio dell'Integrale possono essere ottenute le seguenti disuguaglianze $\sum_{i=p+1}^{+\infty} a_i \leq \int_p^{+\infty} f(x)dx$ e $\int_p^{+\infty} f(x)dx \leq \sum_{i=p}^{+\infty} a_i$ che, a volte, permettono di ottenere maggiorazioni dell'errore che si commette calcolando un termine della successione delle somme parziali della serie $\sum a_n$ invece dell'esatta somma della serie oppure permettono di trovare valori approssimati del reale valore di $\int_1^{\infty} f(x)dx$; per esempio, si ha, posto $S = \sum \frac{1}{n^\alpha}, \alpha > 1$,

$$\left| S - \sum_{n=1}^{p} \frac{1}{n^\alpha} \right| = \sum_{n=p+1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} \leq \int_p^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} = \frac{1}{p(\alpha - 1)}.$$

Osservazione 1.2. Tutto quanto detto sopra può essere ripetuto (con gli ovvi cambiamenti) per funzioni definite in intervalli del tipo $]-\infty, b]$ ed integrabili secondo Riemann in ogni intervallo del tipo $[a, b]$ con $a \in]-\infty, b[$.

Anche l'integrale improprio di 1^a specie ha un interessante significato geometrico, che adesso illustreremo. Sia $f : [a, +\infty[\to [0, +\infty[$ integrabile in senso improprio. Proveremo che il Rettangoloide

$$T = \{(x, y) : x \geq a, 0 \leq y \leq f(x)\}$$

è misurabile secondo Peano-Jordan e che

$$m(T) = \int_a^{+\infty} f(x)dx \qquad (1.2).$$

Osserviamo, preliminarmente, che T è non limitato; quindi per provarne la misurabilità occorre provare la misurabilità di $T \cap \Delta$, al variare di Δ nella famiglia degli insiemi elementari; poniamo $\Delta_{np} = [a, n] \times [0, p]$ per $n, p \in \mathbb{N}, n > a, p \geq 1$, e notiamo (la dimostrazione viene lasciata al lettore) che per ogni Δ esiste $\Delta_{\overline{n},\overline{p}}$ tale che $T \cap \Delta = (T \cap \Delta_{\overline{n},\overline{p}}) \cap \Delta$, cosicché la richiesta misurabilità sarà acquisita una volta provata la misurabilità di $T \cap \Delta_{n,p}$ per ogni $n, p \in \mathbb{N}, n > a, p \geq 1$; si ha $T \cap \Delta_{\overline{n},\overline{p}} = \{(x, y) : a \leq x \leq \overline{n}, 0 \leq y \leq \min(f(x), \overline{p})\}$ con $h_{\overline{p}}(x) = \min(f(x), \overline{p})$ integrabile secondo Riemann in $[a, \overline{n}]$ (si veda Capitolo 13,§2,(vi3)); quindi $T \cap \Delta_{\overline{n},\overline{p}}$ è il rettangoloide di base $[a, \overline{n}]$ relativo alla funzione $h_{\overline{p}}$ integrabile secondo Riemann e quindi risulta integrabile (con, inoltre, $m(T \cap \Delta_{\overline{n},\overline{p}}) = \int_a^{\overline{n}} h_{\overline{p}}(x)dx$): la misurabilità di T è così acquisita. Proviamo adesso la (1.2). È chiaro, da quanto osservato in precedenza, che $m(T) = \sup_{n,p \in \mathbb{N}, n>a, p\geq 1} m(T \cap \Delta_{n,p})$; notiamo, intanto, che

$$m(T \cap \Delta_{\overline{n},\overline{p}}) = \int_a^{\overline{n}} h_{\overline{p}}(x)dx \leq \int_a^{\overline{n}} f(x)dx \leq \int_a^{+\infty} f(x)dx$$

da cui segue che $m(T) \leq \int_a^{+\infty} f(x)dx$; d'altra parte $\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)dx$ e quindi, per $\overline{p} \in N, \overline{p} > \sup\{f(x) : x \in [a, [b] + 1]\}$, da

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^{[b]+1} f(x)dx = \int_a^{[b]+1} h_{\overline{p}}(x)dx = m(T \cap \Delta_{[b]+1,\overline{p}}) \leq m(T)$$

segue che $\int_a^{+\infty} f(x)dx \leq m(T)$, che conclude la prova della (1.2).■

Esercizio 1.5. Sia $f : [a, +\infty[\to [0, +\infty[$ una funzione limitata in ogni $[a, b] \subset [a, +\infty[$; detto T il relativo trapezioide, dimostrare che f è integrabile secondo Riemann in ogni $[a, b] \subset [a, +\infty[$ se e solo se T è misurabile secondo Peano-Jordan. Provare, poi, che f è integrabile in senso improprio se e solo se T è misurabile secondo Peano-Jordan ed ha misura finita.■

Esercizio 1.6. Sia $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ integrabile in senso improprio. Per ogni $x \in [a, +\infty[$, si ponga

$$F(x) = \int_x^{+\infty} f(t)\,dt.$$

Dire se F è continua in $[a, +\infty[$ e calcolare $\lim_{x\to+\infty} F(x)$. Supponendo, poi, che f sia non negativa, dire se F è monotòna. Giustificare le risposte.■

Estendiamo la definizione di integrale improprio di 1^a specie al caso di funzioni definite in $\mathbb{R}$.

Definizione 1.3. *Sia f una funzione reale definita in $\mathbb{R}$ ed integrabile secondo Riemann in ogni sottointervallo chiuso e limitato contenuto in $\mathbb{R}$. Sia $a \in \mathbb{R}$; se f risulta integrabile in senso improprio in $]-\infty, a]$, $[a, +\infty[$ diremo che f è integrabile in senso improprio in $\mathbb{R}$; in questo caso porremo, per definizione*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_{a}^{+\infty} f(x)dx.$$

È facile vedere che la precedente definizione non dipende dalla scelta del punto a, cosicché essa è ben posta.

§2. Integrali impropri di 2^a specie.

Definiamo adesso un altro tipo di integrale improprio (o generalizzato), per funzioni definite in intervalli limitati, chiusi oppure non chiusi, con un numero finito di punti per ognuno dei quali esista un opportuno intorno nel quale non vi sia (necessariamente) integrabilità secondo Riemann (in particolare una tale funzione può essere definita oppure non definita in ognuno di tali punti).

Definizione 2.1. *Sia $f :]a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione integrabile secondo Riemann in ogni intervallo $[c, b]$ con $c \in]a, b[$. La seguente funzione (opposta di una funzione integrale)*

$$F(c) = \int_{c}^{b} f(x)dx \qquad c \in]a, b[$$

è allora ben definita. Se esiste finito il $\lim_{c\to a^+} F(c) = L$ diremo che f è integrabile in senso improprio (o generalizzato) in $]a, b]$ e porremo, per definizione,

$$\int_{a^+}^{b} f(x)dx = L.$$

Il simbolo $\int_{a^+}^{b} f(x)dx$ si chiama *integrale improprio (o generalizzato) di 2^a specie di f*; se non vi è possibilità di confusione possiamo anche scrivere $\int_{a}^{b} f(x)dx$ invece di $\int_{a^+}^{b} f(x)dx$.

Notiamo che nella precedente Definizione 2.1 la funzione f può essere anche definita in $x = a$ o, nel caso non lo sia, la possiamo definire in $x = a$; cosicché si può sempre pensare di avere a che fare con funzioni definite in intervalli chiusi e limitati; è stato usato il simbolo $]a,b]$, invece di $[a,b]$, al solo fine di mettere in evidenza che non è noto se f sia integrabile secondo Riemann in $[a,b]$.

Esercizio 2.1. Sia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una funzione periodica di periodo $T>0$ e sia $a\in\mathbb{R}$ tale che $\int_{a^+}^{a+T} f(x)dx\in\mathbb{R}$; provare che f è integrabile in senso improprio in ogni intervallo del tipo $[a+hT, a+(h+1)T]$, $h\in\mathbb{Z}$, e che si ha $\int_{(a+hT)^+}^{a+(h+1)T} f(x)\,dx = \int_{a^+}^{a+T} f(x)\,dx$, per ogni $h\in\mathbb{Z}$.■

È facile vedere (la dimostrazione viene lasciata al lettore) che se $h_1,h_2:]a,b]\to\mathbb{R}$ sono integrabili in senso improprio, allora anche $\alpha_1h_1+\alpha_2h_2$ è integrabile in senso improprio, per ogni $\alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{R}$, e si ha

$$\int_{a^+}^{b}(\alpha_1h_1+\alpha_2h_2)(x)dx=\alpha_1\int_{a^+}^{b}h_1(x)dx+\alpha_2\int_{a^+}^{b}h_2(x)dx.$$

È chiaro che se una funzione $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ è integrabile secondo Riemann, essa verifica tutte le condizioni che permettono di porsi il problema della sua integrabilità in senso improprio; nasce, allora, il prolema di determinare quali relazioni intercorrono fra l'integrale di Riemann e l'integrale improprio di 2^a specie; a tale proposito si ha il seguente risultato

Proposizione 2.1.*Sia* $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *integrabile secondo Riemann. Allora* f *è integrabile in senso improprio in* $]a,b]$ *ed i due integrali coincidono.*

Dimostrazione. È noto (Capitolo 13) che la funzione $F(c)=\int_c^b f(x)dx:]a,b[\to\mathbb{R}$ è lipschitziana e quindi il suo limite per $c\to a$ esiste finito (Capitolo 9); allora f è integrabile in senso improprio. Inoltre si ha (con M denoteremo una costante che maggiora $|f|$ in $[a,b]$)

$$\left|\int_a^b f(x)dx-F(c)\right|=\left|\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx-F(c)\right|=$$

$$\left|\int_a^c f(x)dx\right|\le\int_a^c|f(x)|\,dx\le M|c-a|\to 0\quad\text{per}\quad c\to a$$

da cui segue l'uguaglianza dei due integrali.■

La precedente Proposizione 2.1 è utile per il calcolo del valore dell'integrale di Riemann qualora si conosca una primitiva di f in $]a,b]$ (per esempio nel caso di f generalmente continua, con discontinuità nel primo estremo a).

Dalla Definizione 2.1 e dal Criterio di Cauchy per la convergenza delle funzioni (Capitolo 8) deriva il seguente

Criterio di Cauchy.*Sia* $f:]a,b]\to\mathbb{R}$ *una funzione integrabile secondo Riemann in ogni intervallo* $[c,b]$ *con* $c\in]a,b[$. f *è integrabile in senso improprio se e solo se per ogni* $\epsilon>0$ *esiste* $\delta>0$ *tale che per ogni*

$c_1, c_2 \in]a, b]$ *con* $|c_1 - a| < \delta, |c_2 - a| < \delta$ *risulta*

$$\left| \int_{c_1}^{c_2} f(x)dx \right| < \epsilon.$$

Dimostrazione. La dimostrazione viene lasciata al lettore.

Una importante conseguenza del Criterio di Cauchy è il seguente

Primo Teorema di Confronto.*Sia* $f :]a, b] \to [0, +\infty[$ *una funzione integrabile secondo Riemann in ogni intervallo* $[c, b]$ *con* $c \in]a, b[$. *Sia* $g :]a, b] \to [0, +\infty[$ *una funzione integrabile in senso improprio in* $]a, b]$ *tale che* $f(x) \le g(x)$ *in un opportuno intorno destro* U *di* a. *Allora* f *risulta integrabile in senso improprio in* $]a, b]$. *Inoltre, per ogni* $d \in]a, b] \cap U$ *si ha*

$$\int_{a^+}^{d} f(x)dx \le \int_{a^+}^{d} g(x)dx \qquad (2.1).$$

Dimostrazione. Per il Criterio di Cauchy è sufficiente provare che per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $c_1, c_2 \in]a, b]$ con $|c_1 - a| < \delta, |c_2 - a| < \delta$ risulta $\left| \int_{c_1}^{c_2} f(x)dx \right| < \epsilon$. Per arbitrari $c_1, c_2 \in]a, b] \cap U$ si ha

$$\left| \int_{c_1}^{c_2} f(x)dx \right| \le \left| \int_{c_1}^{c_2} g(x)dx \right|;$$

poiché g è integrabile in senso improprio, dalla condizione necessaria del precedente Criterio di Cauchy segue che fissato $\epsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che $\left| \int_{c_1}^{c_2} g(x)dx \right| < \epsilon$ ogni volta che $c_1, c_2 \in]a, b]$ con $|c_1 - a| < \delta, |c_2 - a| < \delta$; per $c_1, c_2 \in U, |c_1 - a| < \delta, |c_2 - a| < \delta$, si ha allora che

$$\left| \int_{c_1}^{c_2} f(x)dx \right| < \epsilon$$

che è quanto volevamo provare. La (2.1) si dimostra come fatto per la (1.1) tenendo conto della non crescenza delle funzioni $F(c) = \int_c^d f(x)dx, G(c) = \int_c^d g(x)dx$.∎

Esercizio 2.2. Siano $f, g, h :]a, b] \to \mathbb{R}$ tre funzioni integrabili secondo Riemann in ogni intervallo $[c, b]$ con $c \in]a, b]$ tali che $f(x) \le g(x) \le h(x)$ per ogni $x \in]a, b]$; supponiamo, inoltre, che f ed h siano integrabili in senso improprio. Provare che g è integrabile in senso improprio.∎

In maniera analoga si dimostra il seguente

Secondo Teorema di Confronto.*Sia* $f :]a, b] \to [0, +\infty[$ *una funzione integrabile secondo Riemann in ogni intervallo* $[c, b]$ *con* $c \in]a, b[$ *non integrabile in senso improprio. Sia* $g :]a, b] \to [0, +\infty[$ *una funzione integrabile secondo Riemann in ogni intervallo* $[c, b]$ *con* $c \in]a, b[$ *tale che* $f(x) \le g(x)$ *in un opportuno intorno destro* U *di* a. *Allora* g *risulta non integrabile in senso improprio in* $]a, b]$. *Inoltre, si ha*

$$\int_{a^+}^{b} f(x)dx = \int_{a^+}^{b} g(x)dx = +\infty.$$

Anche in questo caso si hanno i seguenti corollari, la cui dimostrazione viene lasciata al lettore

Corollario 2.2. *Sia $f :]a,b] \to [0,+\infty[$ una funzione integrabile secondo Riemann in ogni intervallo $[c,b]$ con $c \in]a,b[$. Sia $g :]a,b] \to [0,+\infty[$ una funzione integrabile in senso improprio in $]a,b]$ tale che $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L \in \mathbb{R}$ (ovviamente $L \geq 0$). Allora f è integrabile in senso improprio.*

Corollario 2.3. *Sia $f :]a,b] \to [0,+\infty[$ una funzione integrabile secondo Riemann in ogni intervallo $[c,b]$ con $c \in]a,b[$. Sia $g :]a,b] \to [0,+\infty[$ una funzione non integrabile in senso improprio in $]a,b]$ tale che $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L \in]0,+\infty]$. Allora $\int_{a^+}^b g(x)dx = +\infty$ e f non è integrabile in senso improprio.*

I Teoremi di Confronto ed i Corollari 2.2 e 2.3 vengono solitamente applicati scegliendo la *funzione campione* $g(x) = \frac{1}{(x-a)^\alpha}$ (che risulta integrabile se $0 < \alpha < 1$, non integrabile se $1 \leq \alpha$, la dimostrazione viene lasciata al lettore), con α opportuno ed $x \in]a,b]$.

Corollario 2.4. *Sia $f :]a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione integrabile secondo Riemann in ogni intervallo $[c,b]$ con $c \in]a,b[$. Sia $g :]a,b] \to [0,+\infty[$ una funzione integrabile in senso improprio in $]a,b]$ tale che $|f(x)| \leq g(x)$ per ogni $x \in]a,b]$. Allora $|f|$ risulta integrabile in senso improprio in $]a,b]$.*

Definizione 2.2. *Sia $f :]a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione integrabile secondo Riemann in ogni intervallo $[c,b]$ con $c \in]a,b[$. Se $|f|$ è integrabile in senso improprio si dice che f è assolutamente integrabile in senso improprio*

L'assoluta integrabilità è molto importante, perché essa implica l'integrabilità, fatto non vero per la integrabilità secondo Riemann (Osservazione 2.1 del Capitolo 13); per dimostrare l'implicazione annunciata osserviamo che $0 \leq f^+(x) = \frac{|f(x)|+f(x)}{2} \leq |f(x)|$ e $0 \leq f^-(x) = \frac{|f(x)|-f(x)}{2} \leq |f(x)|$, per ogni $x \in]a,b]$ e quindi che la assoluta integrabilità determina l'integrabilità di f^+, f^-, grazie al Criterio di Confronto; per concludere con l'integrabilità di f è allora sufficiente osservare che $f(x) = f^+(x) - f^-(x)$ per ogni $x \in]a,b]$. È inoltre facile vedere (la dimostrazione viene lasciata al lettore) che, se f è assolutamente integrabile, si ha la seguente disuguaglianza

$$\left|\int_{a^+}^b f(x)dx\right| \leq \int_{a^+}^b |f(x)|dx.$$

Esercizio 2.3. Siano $f, g : [a,+\infty[\to \mathbb{R}$ due funzioni integrabili secondo Riemann in ogni intervallo $[a,b]$ con $b \in]a,+\infty[$; supponiamo che f^2, g^2 siano integrabili in senso improprio. Provare che fg è assolutamente integrabile in senso improprio.$\blacksquare$

Il seguente esempio prova che esistono funzioni integrabili in senso improprio, ma non assolutamente integrabili

Esempio 2.1. Consideriamo la funzione

$$f(x) = \frac{(-1)^{\left[\frac{1}{x}\right]}}{x} :]0,1] \to \mathbb{R}$$

ed osserviamo subito che essa risulta non assolutamente integrabile, come facilmente si verifica (la dimostrazione viene lasciata al lettore). Per provare che essa è integrabile consideriamo intanto la successione

$$\left(\int_{\frac{1}{n+1}}^{1} f(x)dx \right)$$

e proviamo che essa converge; si ha

$$\int_{\frac{1}{n+1}}^{1} f(x)dx = \sum_{h=1}^{n} \int_{\frac{1}{h+1}}^{\frac{1}{h}} f(x)dx;$$

per calcolare gli integrali al secondo membro della precedente uguaglianza osserviamo che

$$f(x) = \begin{cases} \frac{(-1)^h}{x} & x \in \left]\frac{1}{h+1}, \frac{1}{h}\right] \\ (-1)^{h+1}(h+1) & x = \frac{1}{h+1} \end{cases}$$

cosicché f risulta generalmente continua e limitata in $\left[\frac{1}{h+1}, \frac{1}{h}\right]$ e quindi ivi integrabile secondo Riemann; con facili calcoli (che vengono lasciati al lettore)

$$\int_{\frac{1}{h+1}}^{\frac{1}{h}} f(x)dx = (-1)^h \ln\left(1 + \frac{1}{h}\right)$$

ne segue quindi che

$$\int_{\frac{1}{n+1}}^{1} f(x)dx = \sum_{h=1}^{n} (-1)^h \ln\left(1 + \frac{1}{h}\right);$$

la successione considerata è allora la successione delle somme parziali di una serie a segni alternati che converge, come facilmente si prova, grazie al Criterio di Leibnitz. Proviamo adesso che f è integrabile in senso improprio; per $t \in]0,1]$ sia $n \in \mathbb{N}$ tale che $\frac{1}{n+1} < t \leq \frac{1}{n}$. Si ha allora

$$\left| \int_{t}^{1} f(x)dx - \int_{\frac{1}{n+1}}^{1} f(x)dx \right| = \left| \int_{t}^{\frac{1}{n+1}} f(x)dx \right| =$$

$$\int_{\frac{1}{n+1}}^{t} \frac{1}{x}dx = \ln[t(n+1)] \leq \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

se $t \to 0$, allora $n \to +\infty$, cosicché

$$\lim_{t \to 0} \left| \int_{t}^{1} f(x)dx - \int_{\frac{1}{n+1}}^{1} f(x)dx \right| = 0$$

da cui segue che $\int_t^1 f(x)dx$ converge allo stesso limite della successione $\left(\int_{\frac{1}{n+1}}^1 f(x)dx\right)$. Quanto volevamo è così provato.■

Osservazione 2.1. Tutto quanto detto sopra può essere ripetuto per funzioni definite in intervalli del tipo $[a,b[$ ed integrabili secondo Riemann in ogni intervallo del tipo $[a,c]$ con $c \in]a,b[$ (con gli ovvi cambiamenti; per esempio, in questo caso la *funzione campione* sarà la funzione $g(x) = \frac{1}{(b-x)^\alpha}$).

Ancora una volta l'integrale considerato ha un preciso (ed importante) significato geometrico.

Sia $f :]a,b] \to [0,+\infty[$ integrabile in senso improprio. Proveremo che il Rettangoloide

$$T = \{(x,y) : a < x \le b, 0 \le y \le f(x)\}$$

è misurabile secondo Peano-Jordan e che

$$m(T) = \int_{a^+}^b f(x)dx \tag{2.1}$$

Innanzitutto supponiamo f limitata; possono verificarsi i seguenti due casi

(i) $\int_c^b f(x)dx = 0$ per ogni $c \in]a,b[$ (ne segue che $\int_{a^+}^b f(x)dx = 0$)

(ii) esiste $c \in]a,b[$ tale che $\int_c^b f(x)dx > 0$ (ne segue che $\int_d^b f(x)dx > 0$ per ogni $d \in]a,c[$, grazie alla monotonìa rispetto all'intervallo dell'integrale di Riemann);

nel caso (i), fissato $\epsilon > 0$, scegliamo $\sigma > 0$ tale che $a+\sigma < b, \sigma \sup\{f(x) : x \in]a,b]\} < \frac{\epsilon}{2}$; poiché $\int_{a+\sigma}^b f(x)dx = 0$ esiste una decomposizione D_ϵ di $[a+\sigma,b]$ per cui $S_{D_\epsilon} < \frac{\epsilon}{2}$. Il numero $S_{D_\epsilon} + \sigma\sup\{f(x) : x \in]a,b]\}$ è, come facilmente si verifica (la dimostrazione viene lasciata al lettore), la misura di un plurirettangolo $\mathbb{P} \supset T$ tale che $m(\mathbb{P}) < \epsilon$; poiché il precedente ragionamento può essere ripetuto per ogni $\epsilon > 0$, concludiamo che T è misurabile con misura nulla, cosicché anche la (2.1) è verificata; nel caso (ii), fissato $\epsilon > 0$, scegliamo $\sigma > 0$ tale che $a+\sigma < c, \sigma\sup\{f(x) : x \in]a,b]\} < \frac{\epsilon}{2}$; dalla teoria dell'integrale di Riemann (Capitolo 13) segue che esiste una decomposizione D_ϵ di $[a+\sigma,b]$ tale che $0 < s_{D_\epsilon}, S_{D_\epsilon} - s_{D_\epsilon} < \frac{\epsilon}{2}$; ne viene facilmente (la dimostrazione viene lasciata al lettore) che $\sigma\sup\{f(x) : x \in]a,b]\} + S_{D_\epsilon}$ è la misura di un plurirettangolo $\mathbb{P}_1 \supset T$ e che s_{D_ϵ} è la misura di un plurirettangolo $\mathbb{P}_2 \subset T$; poiché $m(\mathbb{P}_1) - m(\mathbb{P}_2) < \epsilon$ abbiamo la misurabilità di T; inoltre,

$$m(T) - \int_{a^+}^b f(x)dx \le m(\mathbb{P}_1) - \int_{a+\sigma}^b f(x)\,dx \le \sigma\sup\{f(x) : x \in]a,b]\} + S_{D_\epsilon} - s_{D_\epsilon} < \epsilon;$$

d'altra parte, $\int_{a^+}^b f(x)dx = \lim_{c\to a+} \int_c^b f(x)\,dx$; poiché, per $c < a+\sigma$ si ha

$$\int_c^b f(x)dx = \int_c^{a+\sigma} f(x)dx + \int_{a+\sigma}^b f(x)dx \le \sigma\sup\{f(x) : x \in]a,b]\} + S_{D_\epsilon}$$

ricaviamo facilmente che

$$\int_{a^+}^{b} f(x)dx - m(T) \leq \sigma \sup\{f(x) : x \in]a, b]\} + S_{D_\epsilon} - s_{D_\epsilon} < \epsilon;$$

quindi

$$\left| \int_{a^+}^{b} f(x)dx - m(T) \right| < \epsilon$$

da cui $m(T) = \int_{a^+}^{b} f(x)dx$ grazie all'arbitrarietà di ϵ.

Supponiamo, adesso, f non limitata e quindi T non limitato; la misurabilità di T sarà allora provata una volta che faremo vedere che $T \cap \Delta$ è misurabile per ogni Δ insieme elementare di $\mathbb{R}^2$; posto $\Delta_n = [a, b] \times [0, n], n \in \mathbb{N}$, si vede facilmente (la dimostrazione viene lasciata al lettore) che per ogni Δ esiste $\overline{n} \in \mathbb{N}$ tale che $T \cap \Delta = (T \cap \Delta_{\overline{n}}) \cap \Delta$, cosicché sarà sufficiente provare la misurabilità di $T \cap \Delta_n$, per ogni $n \in \mathbb{N}$; notiamo,intanto, che

$$T \cap \Delta_n = \{(x, y) : a < x \leq b, 0 \leq y \leq \min(f(x), n) = h_n(x)\} \qquad \forall n \in \mathbb{N},$$

dove h_n è integrabile in senso improprio perché non negativa e maggiorata da f; inoltre h_n è limitata superiormente e quindi, per quanto visto nella prima parte, $T \cap \Delta_n$, che ne è il relativo rettangoloide, è misurabile; inoltre $m(T \cap \Delta_n) = \int_{a^+}^{b} h_n(x)dx$. Osserviamo che si ha (la dimostrazione viene lasciata al lettore) $m(T) = \sup_n m(T \cap \Delta_n)$; poiché

$$m(T \cap \Delta_n) = \int_{a^+}^{b} h_n(x)dx \leq \int_{a^+}^{b} f(x)dx \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

ricaviamo che $m(T) \leq \int_{a^+}^{b} f(x)dx$; d'altra parte, se $c \in]a, b[$ esiste $\overline{n} \in \mathbb{N}$ tale che $\sup\{f(x) : x \in [c, b]\} \leq \overline{n}$ cosicché

$$\int_{c}^{b} f(x)dx = \int_{c}^{b} h_{\overline{n}}(x)dx \leq \int_{a^+}^{b} h_{\overline{n}}(x)dx = m(T \cap \Delta_{\overline{n}}) \leq m(T)$$

e quindi $\int_{a^+}^{b} f(x)dx \leq m(T)$, che dimostra la (2.1).∎

Esercizio 2.4. Sia $f :]a, b] \to [0, +\infty[$ una funzione limitata in ogni $[c, b] \subset]a, b]$; detto T il relativo trapezioide, dimostrare che f è integrabile secondo Riemann in ogni $[c, b] \subset]a, b]$ se e solo se T è misurabile secondo Peano-Jordan. Provare, poi, che f è integrabile in senso improprio se e solo se T è misurabile secondo Peano-Jordan ed ha misura finita.∎

Esercizio 2.5. Sia $f :]a, b] \to \mathbb{R}$ integrabile in senso improprio. Per ogni $x \in]a, b]$, si ponga

$$F(x) = \int_{a^+}^{x} f(t)\, dt.$$

Dire se F è continua in $]a,b]$ e calcolare $\lim_{x\to a+} F(x)$. Supponendo, poi, che f sia non negativa, dire se F è monotòna. Giustificare le risposte.■

Esercizio 2.6. Sia $f :]a,b] \to \mathbb{R}$ integrabile in senso improprio. Definiamo

$$F(x) = \begin{cases} \alpha & x = a \\ \int_{a^+}^{x} f(t)dt & x \in]a,b] \end{cases} : [a,b] \to \mathbb{R}.$$

Dire se esiste un valore di $\alpha \in \mathbb{R}$ per il quale F è continua in $x = a$. Supponendo, poi, f continua in un punto $x_0 \in]a,b]$, dire se esiste F' in tale punto e, eventualmente, calcolarla. F è derivabile in $x = a$? Giustificare le risposte.■

Estendiamo, adesso, la definizione di integrale improprio di 2^a specie

Definizione 2.3._Sia f una funzione reale definita in $X = [a,b] \backslash \{y_1, y_2, ...y_p\}$ ed integrabile secondo Riemann in ogni sottointervallo chiuso e limitato contenuto in X. Supposto che i punti $y_i, i = 1,2,...p$, siano stati ordinati in ordine crescente, denotiamo con $z_i, i = 1,2...p-1$, dei punti arbitrari tali che $y_i < z_i < y_{i+1}$ per $i = 1,2,...p-1$. Se f risulta integrabile in senso improprio in $[a, y_1[\,,\ ]y_i, z_i], [z_i, y_{i+1}[\,,\ ]y_p, b]$ per $i = 1,2...p-1$, diremo che f è integrabile in senso improprio in X; in questo caso porremo, per definizione_

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{y_1} f(x)dx + \sum_{i=1}^{p-1} \left(\int_{y_i}^{z_i} f(x)dx + \int_{z_i}^{y_{i+1}} f(x)dx \right) + \int_{y_p}^{b} f(x)dx.$$

È ovvio che ognuno dei risultati provati in questo paragrafo può essere esteso all'integrale definito nella Definizione 2.3; lasciamo questa semplice fatica al lettore.

Prima di concludere osserviamo che qualora non sia necessario conoscere i punti dell'intervallo $[a,b]$ in un intorno dei quali f non è Riemann integrabile si potrà anche parlare di integrabilità in senso improprio (o generalizzato) di f in $[a,b]$.

§3. _Integrale improprio di 3^a specie._

In questo terzo paragrafo introduciamo un nuovo tipo di integrale improprio che è, in un certo senso, una "combinazione" dei due tipi precedenti.

Definizione 3.1._Sia $f : X = [a, +\infty[\backslash \{y_1, y_2, \ldots y_p\} \to \mathbb{R}$ integrabile in ogni intervallo chiuso e limitato contenuto in X e sia $b \in \mathbb{R}, b > y_i, i = 1,2,\ldots p$. Diremo che f è integrabile in senso improprio in X se essa risulta integrabile in senso improprio in $[a,b]$ e in $[b, +\infty[$; in tal caso porremo_

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^{+\infty} f(x)dx.$$

È facile vedere che la definizione data non dipende dalla scelta del punto b, purché $b > y_i, i = 1, 2, \ldots p$. In maniera analoga possiamo definire l'integrale di 3^a specie per funzioni f definite in insiemi del tipo $]-\infty, b] \setminus \{y_1, y_2, \ldots y_p\}$ o del tipo $\mathbb{R} \setminus \{y_1, y_2, \ldots y_p\}$.

Tutti i risultati mostrati nei primi due paragrafi di questo capitolo possono essere ottenuti per provarne di analoghi per il nuovo tipo di integrale; lasciamo questo semplice (ma utile) compito al lettore.

Esercizio 3.1. Siano $a, c \in \mathbb{R}, b, d \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Date le funzioni $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ continua e $\phi : [c, d[\to [a, b[$ derivabile con derivata continua e tale che $\lim_{x \to d} \phi(x) = b$ e posto $h(x) = f(\phi(x))\phi'(x) : [c, d[\to \mathbb{R}$ provare che f è integrabile in senso improprio in $[\phi(c), b[$ (e quindi in $[a, b[$) se e solo se h è integrabile in senso improprio in $[c, d[$ e in questo caso si ha

$$\int_c^d h(x)dx = \int_{\phi(c)}^b f(x)dx$$

(suggerimento: si usino alcuni risultati relativi ai limiti di funzioni composte che si trovano nel Capitolo 8).∎

Esercizio 3.2. Si dimostri che la funzione

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin tx}{t}\, dt :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$$

è costante, utilizzando il risultato dell'Esercizio 3.1.∎