CAPITOLO 12

INTEGRAZIONE INDEFINITA

§1.<u>*Integrale indefinito.*</u>

Iniziamo adesso lo studio del *calcolo integrale* richiamando la nozione (qui fondamentale) di primitiva.

Definizione 1.1. *Data una funzione* $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ *diremo che essa è dotata di primitive se esiste una funzione* $F : (a, b) \to \mathbb{R}$ *(detta primitiva di* f*), ivi derivabile, tale che* $F'(x) = f(x)$ *per ogni* $x \in (a, b)$*.*

Proposizione 1.1. *Sia* $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ *una funzione dotata di primitiva* F*. Allora tutte e solo le funzioni* $F + c$*, al variare della costante* c *in* $\mathbb{R}$, *sono primitive di* f*.*

Dimostrazione. È immediato verificare che le funzioni del tipo $F + c$ sono primitive di f, qualunque sia la costante $c \in \mathbb{R}$. Viceversa, sia G un'altra primitiva di f; allora la funzione $G - F$ ha derivata identicamente nulla in (a, b); quindi, per un corollario del Teorema di Lagrange, essa è costante in (a, b). La dimostrazione è conclusa.■

Osservazione importante. Può accadere che una funzione f sia definita in un insieme che è unione di più intervalli a due a due disgiunti; possiamo allora estendere, in modo ovvio, la nozione di primitiva a questa classe di funzioni, chiamando primitiva ogni funzione F derivabile la cui derivata sia, nell'insieme dato, uguale alla funzione di partenza. La precedente Proposizione 1.1 si applica però *solo* a funzioni definite in un intervallo, cosicché non è possibile dire che per una funzione definita in un insieme unione di intervalli tutte e solo le funzioni del tipo $F + c$, al variare di c in R, sono primitive; se una tale funzione è, come facilmente si prova, primitiva di f, non è vero che ogni primitiva è del tipo suddetto; se f fosse, per esempio, definita in un insieme del tipo $(a, b) \cup (c, d)$, con i due intervalli privi di punti comuni e F fosse una primitiva di f, l'insieme delle primitive G di f sarebbe l'insieme delle funzioni del tipo seguente

$$G(x) = \begin{cases} F(x) + c_1 & x \in (a, b) \\ \\ F(x) + c_2 & x \in (c, d) \end{cases}$$

essendo c_1 e c_2 due costanti arbitrarie *in generale diverse fra loro*; infatti, in questo caso, la Proposizione 1.1 va applicata sia alla restrizione di f all'intervallo (a, b) che a quella all'intervallo (c, d).

Esempio 1.1. La funzione $f(x) = \frac{1}{x}$ è definita in $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$ ed ha la funzione $F(x) = \ln|x|$ come primitiva; allora le sue primitive sono tutte e solo le funzioni del tipo

$$G(x) = \begin{cases} \ln|x| + c_1 & x \in]-\infty, 0[\\ \ln|x| + c_2 & x \in]0, +\infty[\end{cases}$$

Esempio 1.2. La funzione $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ è definita in $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\} = \cup_{k\in\mathbb{Z}}] - \frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[$ ed ha la funzione $F(x) = \mathrm{tg}x$ come primitiva; allora le sue primitive sono tutte e solo le funzioni G che ristrette ad un qualunque intervallo $I_k =] - \frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[, k \in \mathbb{Z}$, hanno la seguente espressione analitica

$$G_{|]-\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi[}(x) = \mathrm{tg}x + c_k \qquad x \in I_k, k \in \mathbb{Z}. \blacksquare$$

Sappiamo che valgono i seguenti fatti:

j) esistono funzioni dotate di primitive (in seguito sarà anche provato che **ogni funzione continua in un intervallo è ivi dotata di primitive**; questo fondamentale risultato sarà usato spesso in questo capitolo);

jj) esistono funzioni non dotate di primitive (è sufficiente pensare alle funzioni non continue con discontinuità che non siano di 3^a specie).

Definizione 1.2. *Chiameremo integrale indefinito di $f : X \to \mathbb{R}, X$ intervallo o unione di intervalli a due a due disgiunti, denotato dal simbolo*

$$\int f(x)dx,$$

l'insieme di tutte le primitive di f (che può quindi anche essere vuoto).

Dal calcolo differenziale e dalla definizione di primitiva si ricava la seguente tabella

TABELLA 1

funzione	**una primitiva**	**funzione**	**una primitiva**
$\sin x$	$-\cos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos x$
$\cos x$	$\sin x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\mathrm{tg}x$
$\frac{1}{x}$	$\ln \lvert x \rvert$	$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\mathrm{cotg}x$
$x^a \ \ (a \neq -1)$	$\frac{x^{a+1}}{a+1}$	$\sinh x$	$\cosh x$
$a^x \ \ (a \neq 1)$	$\frac{a^x}{\ln a}$	$\cosh x$	$\sinh x$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\mathrm{arctg}x$	$\frac{1}{\cosh^2 x}$	$\mathrm{tgh}x$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sinh^2 x}$	$-\mathrm{cotgh}x$

Da quanto finora detto il lettore può facilmente ricavare l'integrale indefinito di ognuna delle funzioni elementari sopra considerate, quando definite nel proprio dominio.

§2.*Proprietà dell'integrale indefinito.*

L'integrale indefinito gode delle seguenti importanti proprietà:

a) *Omogeneità:* Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ e sia $c \in \mathbb{R}, c \neq 0$; allora si ha

$$\int cf(x)dx = c \int f(x)dx$$

Dimostrazione. Supponiamo che $\int f(x)dx \neq \emptyset$. Sia F una primitiva di f; è chiaro che cF è primitiva di cf, cosicché

$$c \int f(x)dx \subseteq \int cf(x)dx$$

con il secondo insieme che risulta ovviamente non vuoto. Supponiamo, ora, che si abbia $\int cf(x)dx \neq \emptyset$ e sia $H \in \int cf(x)dx$; è chiaro che $H = c\frac{H}{c}$ dove $\frac{H}{c} \in \int f(x)dx$; quindi $H \in c \int f(x)dx$ da cui segue

$$\int cf(x)dx \subseteq c \int f(x)dx$$

con il secondo insieme non vuoto. La precedente dimostrazione prova anche che se uno dei due insiemi della tesi è vuoto, anche l'altro deve esserlo. La tesi è così provata.■

La proprietà di omogeneità per l'integrale indefinito non può valere se $c = 0$; in tale caso, infatti, l'insieme $\left\{\int cf(x)dx\right\}$ è costituito da tutte le funzioni costanti, mentre l'insieme $c\left\{\int f(x)dx\right\}$ è vuoto oppure costituito solo dalla funzione identicamente nulla.■

b) *Distributività:* Siano date $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ dotate di primitive; allora $f+g$ ha primitive e risulta

$$\int [f(x)+g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

Dimostrazione. Supponiamo che F e G siano, rispettivamente, una primitiva di f ed una primitiva di g. È chiaro che $F+G$ è primitiva di $f+g$, cosicché $\int [f(x)+g(x)]dx \neq \emptyset$; inoltre

$$\int f(x)dx + \int g(x)dx \subseteq \int [f(x)+g(x)]dx.$$

Sia adesso $H \in \int [f(x)+g(x)]dx$ e sia F una primitiva di f; è chiaro che $H-F$ è primitiva per g, cosicché $H = (H-F)+F \in \int f(x)dx + \int g(x)dx$; quindi

$$\int [f(x)+g(x)]dx \subseteq \int f(x)dx + \int g(x)dx,$$

che conclude la dimostrazione.■

Esercizio 2.1. Dire se la proprietà di distributività continua a valere sotto l'ipotesi, più generale, seguente: "almeno una delle due funzioni f e g sia dotata di primitive". Cosa succede se nessuna delle due funzioni f e g ha primitive?■

Le due precedenti proprietà permettono di eseguire il seguente calcolo

$$\int (a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n)dx = a_0\frac{x^{n+1}}{n+1} + a_1\frac{x^n}{n} + \ldots + a_nx + c \qquad \forall c \in \mathbb{R}$$

essendo $n \in \mathbb{N}, n \geq 1, a_0, a_1, \ldots a_n \in \mathbb{R}$.

§3.*Integrazione per parti.*

Una formula molto importante per il calcolo di integrali indefiniti è dimostrata nella seguente

Proposizione 3.1 (Formula di Integrazione per Parti). *Siano $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ due funzioni derivabili, tali che almeno uno dei prodotti $f'g$ e fg' abbia primitive; allora anche l'altro dei prodotti suddetti ha primitive e si ha*

$$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx.$$

Dimostrazione. Dal Teorema di Derivazione di un Prodotto sappiamo che $(fg)' = f'g + fg'$; poiché la funzione al primo membro ha primitive ed una delle due al secondo membro ha primitive, anche l'altra deve averne. Sia ora $H \in \int f'(x)g(x)dx$; allora $fg - H \in \int f(x)g'(x)dx$; poiché $H = fg - (fg - H)$, otteniamo che

$$\int f'(x)g(x)dx \subseteq f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx$$

Viceversa, sia $K \in f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx$; esiste così $M \in \int f(x)g'(x)dx$, tale che $K = fg - M$; quindi $K' = (fg)' - M' = f'g + fg' - fg' = f'g$ e quindi $K \in \int f'(x)g(x)dx$. Ciò significa che

$$f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx \subseteq \int f'(x)g(x)dx$$

che conclude la dimostrazione.■

Calcoliamo, come applicazione dei precedenti risultati, i seguenti integrali indefiniti:

i) $\int \ln^n x dx$, essendo $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$; integrando per parti si ottiene, grazie anche all'uso della omogeneità dell'integrale indefinito, la seguente *formula di ricorrenza o iterazione*

$$\int \ln^n x dx = \int 1 \ln^n x dx = x \ln^n x - \int xn \ln^{n-1} x \frac{1}{x} dx = x \ln^n x - n \int \ln^{n-1} x dx \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

che permette di rimandare il calcolo dell'integrale considerato a quello di un integrale più semplice o già calcolato; per esempio, per $n = 1$ si ha

$$\int \ln x dx = x \ln x - \int 1 dx = x \ln x - x + c,$$

e per $n = 2$

$$\int \ln^2 x dx = x \ln^2 x - 2 \int \ln x dx = x \ln^2 x - 2x \ln x + 2x + c.$$

ii) $\int x^n e^x dx$, essendo $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$; integrando per parti si ottiene, grazie anche all'uso della omogeneità dell'integrale indefinito, la seguente *formula di ricorrenza o iterazione*

$$\int x^n e^x dx = x^n e^x - \int n x^{n-1} e^x dx = x^n e^x - n \int x^{n-1} e^x dx \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

iii) $\int x^n \cos x dx$ e $\int x^n \sin x dx$, essendo $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$; integrando per parti si ottengono, grazie anche all'uso della omogeneità dell'integrale indefinito, le seguenti *formule di ricorrenza o iterazione*

$$\int x^n \cos x dx = x^n \sin x - n \int x^{n-1} \sin x dx$$
$$\int x^n \sin x dx = -x^n \cos x + n \int x^{n-1} \cos x dx$$

che vanno usate assieme per calcolare gli integrali dati nel caso di $n > 1$; per esempio, per $n = 3$ si ha

$$\int x^3 \cos x dx = x^3 \sin x - 3 \int x^2 \sin x dx = x^3 \sin x + 3x^2 \cos x - 6 \int x \cos x dx =$$

$$x^3 \sin x + 3x^2 \cos x - 6 \left[x \sin x - \int \sin x dx \right] = x^3 \sin x + 3x^2 \cos x - 6x \sin x - 6 \cos x + c.$$

Esercizio 3.1. Determinare una formula di iterazione per $\int x^n \ln^m x dx, n, m \in \mathbb{N}$.■

Esercizio 3.2. Siano f, g, h tre funzioni definite in uno stesso intervallo (a, b) con f, g dotate di primitive; inoltre sia $\alpha, \alpha \neq 1$, un numero reale tale che $\int f(x)dx = h(x) + \alpha \int f(x)dx + \int g(x)dx$. Provare che $(1 - \alpha) \int f(x)dx = h(x) + \int g(x)dx$ e che $(1 - \alpha) \int f(x)dx - h(x) = \int g(x)dx$.■

Calcoliamo, ancora come applicazione dei precedenti risultati (incluso quelli dell'esercizio 3.2), i seguenti ulteriori integrali

iv) $\int \sin(\ln x)dx$; integrando sempre per parti si ha

$$\int \sin(\ln x)dx = \int 1 \sin(\ln x)dx = x \sin(\ln x) - \int x \cos(\ln x) \frac{1}{x} dx =$$

$$x \sin(\ln x) - \int \cos(\ln x)dx = x \sin(\ln x) - \left[x \cos(\ln x) + \int x \sin(\ln x) \frac{1}{x} dx \right] =$$

$$x \sin(\ln x) - x \cos(\ln x) - \int \sin(\ln x)dx;$$

il risultato dell'esercizio 3.2 permette di concludere che

$$\int \sin(\ln x)dx = \frac{x \sin(\ln x) - x \cos(\ln x)}{2} + c$$

Esercizio 3.3. Calcolare l'integrale $\int \cos(\ln x)dx$.■

v) $\int e^x \cos x dx$; integrando sempre per parti si ha

$$\int e^x \cos x dx = e^x \cos x + \int e^x \sin x dx = e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \cos x dx;$$

il risultato dell'esercizio 3.2 permette di concludere che

$$\int e^x \cos x dx = \frac{e^x \cos x + e^x \sin x}{2} + c$$

Esercizio 3.4. Calcolare l'integrale $\int e^x \sin x dx$.■

vi) $\int \frac{1}{(1+x^2)^n} dx$ essendo $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ (se $n = 1$ si ha un integrale immediato). A tal fine consideriamo l'integrale $\int \frac{1}{(1+x^2)^{n-1}} dx$ che calcoleremo con il metodo di integrazione per parti come segue

$$\int \frac{1}{(1+x^2)^{n-1}} dx = \int 1 \frac{1}{(1+x^2)^{n-1}} dx = x \frac{1}{(1+x^2)^{n-1}} - \int x \frac{2x(1-n)}{(1+x^2)^n} dx =$$

$$\frac{x}{(1+x^2)^{n-1}} - 2(1-n) \int \frac{x^2}{(1+x^2)^n} dx =$$

$$\frac{x}{(1+x^2)^{n-1}} - 2(1-n) \left[\int \frac{x^2+1}{(1+x^2)^n} dx - \int \frac{1}{(1+x^2)^n} dx \right] =$$

$$\frac{x}{(1+x^2)^{n-1}} - 2(1-n) \left[\int \frac{1}{(1+x^2)^{n-1}} dx - \int \frac{1}{(1+x^2)^n} dx \right]$$

ottenendo così (esercizio 3) la seguente *formula di ricorrenza o iterazione*

$$2(1-n) \int \frac{1}{(1+x^2)^n} dx = -\frac{x}{(1+x^2)^{n-1}} + 2(1-n) \int \frac{1}{(1+x^2)^{n-1}} dx + \int \frac{1}{(1+x^2)^{n-1}} dx$$

e quindi

$$\int \frac{1}{(1+x^2)^n} dx = \frac{x}{2(n-1)(1+x^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)} \int \frac{1}{(1+x^2)^{n-1}} dx;$$

per esempio si ha, per n=2,

$$\int \frac{1}{(1+x^2)^2} dx = \frac{x}{2(2-1)(1+x^2)^{2-1}} + \frac{4-3}{2(2-1)} \int \frac{1}{(1+x^2)^{2-1}} dx =$$

$$\frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2} \mathrm{arctg} x + h$$

mentre se n=3 risulta

$$\int \frac{1}{(1+x^2)^3} dx = \frac{x}{2(3-1)(1+x^2)^{3-1}} + \frac{6-3}{2(3-1)} \int \frac{1}{(1+x^2)^{3-1}} dx$$

$$\frac{x}{4(1+x^2)^2} + \frac{3}{4} \int \frac{1}{(1+x^2)^2} dx = \frac{x}{4(1+x^2)^2} + \frac{3}{4} \left[\frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2} \mathrm{arctg} x \right] + h.$$

vii) $\int \cos^n x dx$, essendo $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ (se $n = 1$ si tratta di un integrale immediato); integriamo per parti come segue

$$\int \cos^n x dx = \int \cos^{n-1} x \cos x dx = \cos^{n-1} x \sin x + \int (n-1) \cos^{n-2} x \sin^2 x dx =$$

$$\cos^{n-1} x \sin x + \int (n-1) \cos^{n-2} x(1 - \cos^2 x) dx =$$

$$\cos^{n-1} x \sin x + (n-1) \int \cos^{n-2} x dx - (n-1) \int \cos^n x dx$$

da cui deriva (esercizio 3.2) la seguente *formula di ricorrenza o iterazione*

$$\int \cos^n x dx = \frac{\cos^{n-1} x \sin x}{n} + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x dx;$$

per esempio, sia $n = 3$; si ha allora

$$\int \cos^3 x dx = \frac{\cos^2 x \sin x}{3} + \frac{2}{3} \int \cos x dx = \frac{\cos^2 x \sin x}{3} + \frac{2}{3} \sin x + c$$

mentre per $n = 4$ si ha

$$\int \cos^4 x dx = \frac{\cos^3 x \sin x}{4} + \frac{3}{4} \int \cos^2 x dx =$$

$$\frac{\cos^3 x \sin x}{4} + \frac{3}{4} \left[\frac{\cos x \sin x}{2} + \frac{1}{2} \int 1 dx \right] =$$

$$\frac{\cos^3 x \sin x}{4} + \frac{3}{8} \cos x \sin x + \frac{3}{8} x + c.$$

Esercizio 3.5. Determinare una formula di iterazione per $\int \sin^n x dx, n \in \mathbb{N}$.■

viii) $\int \cos^m x \sin^p x dx$ con almeno uno degli esponenti pari; per fissare le idee sia $m = 2h, h \in \mathbb{N}$; si ha

$$\int \cos^{2h} x \sin^p x dx = \int (\cos^2 x)^h \sin^p x dx = \int (1 - \sin^2 x)^h \sin^p x dx =$$

$$\int \sin^p x \left[\sum_{k=0}^{h} \binom{h}{k} (-1)^k \sin^{2k} x \right] dx = \sum_{k=0}^{h} \binom{h}{k} (-1)^k \int \sin^{2k+p} x dx$$

cosicché il calcolo è ricondotto a quello di integrali del tipo (vii).

§4. *Il primo Teorema di Integrazione per Sostituzione.*

In questo paragrafo dimostriamo il primo dei due fondamentali Teoremi di Integrazione per Sostituzione

Primo Teorema di Integrazione per Sostituzione. *Sia f una funzione reale definita in (a,b), dotata di primitive, e sia g una funzione reale definita in (c,d) ed ivi derivabile a valori in (a,b). Allora $\int f(g(x))g'(x)dx \neq \emptyset$ e inoltre vale la seguente prima formula di integrazione per sostituzione*

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \left[\int f(t)dt\right]_{t=g(x)}$$

Dimostrazione. Osserviamo intanto che se $F \in \int f(t)dt$, allora $F(g)$ è un elemento del primo membro, cosicché ambedue gli insiemi che compaiono nella tesi sono non vuoti. Inoltre, la stessa osservazione permette di concludere che

$$\left[\int f(t)dt\right]_{t=g(x)} \subseteq \int f(g(x))g'(x)dx.$$

Sia $H \in \int f(g(x))g'(x)dx$ e sia F una primitiva di f; poiché $F(g(x))$ è una primitiva della funzione $f(g(x))g'(x)$, H differisce da $F(g)$ per una costante k opportuna; ne viene che esiste $k \in \mathbb{R}$ tale che $H(x) = F(g(x)) + k, x \in (a,b)$, e quindi che

$$H \in \left[\int f(t)dt\right]_{t=g(x)},$$

che conclude la dimostrazione.■

La seguente tabella fornisce un elenco di funzioni le cui primitive sono calcolabili attraverso un uso appropriato del precedente teorema; nella prima colonna sarà indicata la funzione integranda, nella seconda la funzione f e nella terza una delle primitive

TABELLA 2

$\mathbf{f(g(x))g'(x)}$	$\mathbf{f(t)}$	**una primitiva**
$\sin g(x) g'(x)$	$\sin t$	$-\cos g(x)$
$\cos g(x) g'(x)$	$\cos t$	$\sin g(x)$
$\frac{g'(x)}{g(x)}$	$\frac{1}{t}$	$\ln \lvert g(x) \rvert$
$[g(x)]^a g'(x) \ \ (a \neq -1)$	t^a	$\frac{[g(x)]^{a+1}}{a+1}$
$a^{g(x)} g'(x) \ \ (a \neq 1)$	a^t	$\frac{a^{g(x)}}{\ln a}$
$\frac{g'(x)}{1+[g(x)]^2}$	$\frac{1}{1+t^2}$	$\mathrm{arctg} g(x)$
$\frac{g'(x)}{\sqrt{1-[g(x)]^2}}$	$\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$	$\arcsin g(x)$
$-\frac{g'(x)}{\sqrt{1-[g(x)]^2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$	$\arccos g(x)$
$\frac{g'(x)}{\cos^2 g(x)}$	$\frac{1}{\cos^2 t}$	$\mathrm{tg} g(x)$
$\frac{g'(x)}{\sin^2 g(x)}$	$\frac{1}{\cos^2 t}$	$-\mathrm{cotg} g(x)$
$\sinh g(x) g'(x)$	$\sinh t$	$\cosh g(x)$
$\cosh g(x) g'(x)$	$\cosh t$	$\sinh g(x)$
$\frac{g'(x)}{\cosh^2 g(x)}$	$\frac{1}{\cosh^2 t}$	$\mathrm{tgh} g(x)$
$\frac{g'(x)}{\sinh^2 g(x)}$	$\frac{1}{\sinh^2 t}$	$-\mathrm{cotgh} g(x)$

L'integrale indefinito delle funzioni che compaiono nella prima colonna della precedente Tabella 2 può adesso essere perfettamente determinato dal lettore una volta che si tenga conto dell'*osservazione importante* fatta all'inizio del capitolo e relativa alle primitive di funzioni non definite in intervalli, dal momento che l'insieme in cui si devono calcolare le primitive di $f(g(x))g'(x)$ non è necessariamente un intervallo; per esempio, la funzione $\frac{g'(x)}{g(x)}$ è definita nel dominio X di g privato dei punti dove g si annulla; supponendo che X sia un aperto, è facile vedere che la continuità di g (dovuta alla sua derivabilità) implica che $X \setminus \{x : x \in X, g(x) \neq 0\}$ è ancora un insieme aperto, e come tale unione di un numero finito o di una infinità numerabile di intervalli aperti a due a due disgiunti (si veda il Teorema 1.2 del Capitolo 5); in questo caso possiamo applicare facilmente la *osservazione importante* sopra richiamata per determinare esattamente l'integrale indefinito della funzione in esame.

Esercizio 4.1. Sia $f : X \to \mathbb{R}$ una funzione continua, con X aperto in $\mathbb{R}$ e sia $a \in \mathbb{R}$. Provare che $\{x : x \in X, g(x) \neq a\}$ è un aperto di $\mathbb{R}$.■

Usiamo il Primo Teorema di Sostituzione per calcolare i seguenti integrali

ix) $\int \cos^m x \sin^p x dx$ con almeno uno degli esponenti dispari; per fissare le idee sia $m = 2h + 1, h \in \mathbb{N}$; si ha

$$\int \cos^{2h+1} x \sin^p x dx = \int (1 - \sin^2)^h x \sin^p x \cos x dx =$$

$$\int \left[\sum_{k=0}^{h} \binom{h}{k} (-1)^k \sin^{2k} x \right] \sin^p x \cos x dx = \sum_{k=0}^{h} \binom{h}{k} (-1)^k \int \sin^{2k+p} x \cos x dx =$$

$$\sum_{k=0}^{h} \binom{h}{k} (-1)^k \frac{\sin^{2k+p+1} x}{2k + p + 1} + c$$

x) $\int \cos px \cos qx dx$, con $p, q \in \mathbb{R}$; usiamo la seguente formula di prostaferesi

$$\cos px \cos qx = \frac{1}{2} \{\cos[(p + q)x] + \cos[(q - p)x]\}$$

da cui si ricava

$$\int \cos px \cos qx dx = \frac{1}{2} \left\{ \int \cos[(p + q)x] dx + \int \cos[(q - p)x] dx \right\};$$

il calcolo dell'integrale dato è così ricondotto a quello di un integrale del tipo $\int \cos \alpha x dx$, facilmente calcolabile con il Primo Teorema di Sostituzione (si veda la seconda riga della Tabella 2); si ha

$$\int \cos \alpha x dx = \begin{cases} x + h & \alpha = 0 \\ \frac{\sin \alpha x}{\alpha} + h & \alpha \neq 0 \end{cases}$$

(si noti che, per quanto riguarda l'integrale dato, si ha $\alpha = 0$ se $p = q$ oppure $p = -q$);

xi) $\int \cos px \sin qx dx$, con $p, q \in \mathbb{R}$; si procede come in (x) usando stavolta la formula di prostaferesi seguente

$$\cos px \sin qx = \frac{1}{2} \{\sin[(p + q)x] - \sin[(p - q)x]\};$$

il calcolo dell'integrale dato è così ricondotto a quello di un integrale del tipo $\int \sin \alpha x dx$, facilmente calcolabile con il Primo Teorema di Sostituzione (si veda la prima riga della Tabella 2); si ha

$$\int \sin \alpha x dx = \begin{cases} h & \alpha = 0 \\ -\frac{\cos \alpha x}{\alpha} + h & \alpha \neq 0 \end{cases}$$

(si noti che, per quanto riguarda l'integrale dato, si ha $\alpha = 0$ se $p = q$ oppure $p = -q$);

xii) $\int \sin px \sin qx dx$, con $p, q \in \mathbb{R}$; si procede come in (x) usando stavolta la formula di prostaferesi seguente

$$\sin px \sin qx = -\frac{1}{2}\left\{\cos[(p+q)x] - \cos[(q-p)x]\right\};$$

il calcolo dell'integrale dato è così ricondotto a quello di un integrale del tipo $\int \cos \alpha x dx$

xiii) calcoliamo in maniera differente l'integrale $\int \cos^m x \sin^p x dx$; ricordiamo che si ha la seguente *Formula di Eulero*: $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ da cui si ricavano le seguenti identità

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i};$$

dalla Formula del Binomio di Newton deriva che

$$\cos^m x = \sum_{h=0}^{m} \binom{m}{h} \frac{e^{ihx} e^{-i(m-h)x}}{2^m} = \sum_{h=0}^{m} \binom{m}{h} \frac{e^{i(2h-m)x}}{2^m} =$$

$$\sum_{h=0}^{m} \binom{m}{h} \frac{\cos[(2h-m)x] + i\sin[(2h-m)x]}{2^m};$$

poiché il primo membro della precedente catena di uguaglianze è reale, tale deve essere l'ultimo membro (ciò significa che la parte complessa deve valere zero); otteniamo così

$$\cos^m x = \sum_{h=0}^{m} \binom{m}{h} \frac{\cos[(2h-m)x]}{2^m};$$

dalla Formula del Binomio di Newton deriva anche che

$$\sin^p x = \sum_{h=0}^{p} \binom{p}{h} (-1)^{p-h} \frac{e^{ihx} e^{-i(p-h)x}}{(2i)^p} = \sum_{h=0}^{p} \binom{p}{h} (-1)^{p-h} \frac{e^{i(2h-p)x}}{(2i)^p} =$$

$$\sum_{h=0}^{p} \binom{p}{h} (-1)^{p-h} \frac{\cos[(2h-p)x] + i\sin[(2h-p)x]}{(2i)^p};$$

poiché il primo membro della precedente catena di uguaglianze è reale, tale deve essere l'ultimo membro (ciò significa che la parte complessa deve valere zero); otteniamo così, per p pari,

$$\sin^p x = \sum_{h=0}^{p} \binom{p}{h} (-1)^{p-h} \frac{\cos[(2h-p)x]}{(2i)^p},$$

mentre, per p dispari,

$$\sin^p x = \sum_{h=0}^{p} \binom{p}{h} (-1)^{p-h} \frac{i\sin[(2h-p)x]}{(2i)^p};$$

la funzione da integrare $\cos^m x \sin^p x$ viene allora scritta come combinazione lineare di funzioni già integrate in (x) e (xi); possiamo quindi procedere al calcolo del suo integrale indefinito usando proprio (x) e (xi);

xiv) $\int \operatorname{arctg} x dx$; integriamo per parti come segue

$$\int \operatorname{arctg} x dx = \int 1 \operatorname{arctg} x dx = x \operatorname{arctg} x - \int \frac{x}{1+x^2} dx =$$

$$x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2} dx = x \operatorname{arctg} x - \ln(1+x^2) + h$$

xv) $\int \arcsin x dx$; integriamo per parti come segue, supponendo $x \in]-1,1[$

$$\int \arcsin x dx = \int 1 \arcsin x dx = x \arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx =$$

$$x \arcsin x + \frac{1}{2}\int \frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}} dx = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + h$$

Proposizione 4.1. *Sia $f : [a,b) \to \mathbb{R}$ una funzione continua e sia $F :]a,b) \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile, con $F'(x) = f(x)$ in $]a,b)$. Allora esiste $\lim_{x\to a} F(x) = l \in \mathbb{R}$ e, posto*

$$G(x) = \begin{cases} l & x = a \\ F(x) & x \in]a,b) \end{cases},$$

si ha che esiste $G'(a)$ e G è una primitiva di f in tutto $[a,b)$.

Dimostrazione. Sia $c \in]a,b[$. f è continua in $[a,c]$ e quindi è ivi limitata, perché ivi uniformemente continua (si veda il Teorema 3.1 del Capitolo 9); allora F è lipschitziana in $]a,c[$ (si veda la Proposizione 3 del Capitolo 10) e quindi uniformemente continua; esiste allora $\lim_{x\to a} F(x) = l \in \mathbb{R}$ (si veda il Teorema 3.4 del Capitolo 9). Per provare la rimanente parte, osserviamo che G verifica le ipotesi del Teorema 7 del Capitolo 10; quindi $G'(a) = \lim_{x\to a} G'(x) = \lim_{x\to a} f(x) = f(a)$, avendo anche usato la continuità di f.∎

Un analogo risultato vale per funzioni definite in intervalli del tipo $(a,b]$ e dotate di primitive in $(a,b[$.

Esempio 4.1. Calcoliamo il seguente integrale indefinito

$$\int |\sin x|\, dx.$$

Innanzitutto osserviamo che la funzione integranda può essere scritta come segue

$$|\sin x| = \begin{cases} \sin x & x \in [2k\pi, \pi + 2k\pi] \quad k \in \mathbb{Z} \\ -\sin x & x \in [\pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi] \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

cosicché detta F una sua generica primitiva in $\mathbb{R}$ (essa deve esistere perché la funzione data è continua in $\mathbb{R}$ e quindi dotata di primitive, come già osservato in precedenza) sarà del tipo seguente

$$F(x) = \begin{cases} -\cos x + c_k & x \in]2k\pi, \pi + 2k\pi[\quad k \in \mathbb{Z} \\ \\ \cos x + d_k & x \in]\pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi[\quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

in $\mathbb{R} \setminus \{h\pi : h \in \mathbb{Z}\}$, essendo c_k, d_k costanti reali arbitrarie (si tenga conto dell'Osservazione Importante fatta all'inizio del Capitolo); usando la Proposizione 4.1 cerchiamo di determinare F in tutto $\mathbb{R}$ come segue; calcoliamo i limiti seguenti

$$\lim_{x \to \pi + 2k\pi^+} F(x) = -1 + d_k \, , \quad \lim_{x \to \pi + 2k\pi^-} F(x) = 1 + c_k$$

ed imponiamo che siano uguali per determinare il valore di F in $\pi + 2k\pi$ ottenendo così che $d_k = 2 + c_k$ per $k \in \mathbb{Z}$; analogamente calcoliamo i limiti seguenti

$$\lim_{x \to 2(k+1)\pi^+} F(x) = -1 + c_{k+1} \, , \quad \lim_{x \to 2\pi + 2k\pi^-} F(x) = 1 + d_k$$

ed imponiamo che siano uguali per determinare il valore di F in $2\pi + 2k\pi$ ottenendo così che $2 + d_k = c_{k+1}$ per $k \in \mathbb{Z}$; possiamo, allora, scrivere

$$F(x) = \begin{cases} \text{............} & \text{.......} \\ -\cos x - 4 + c_0 & x \in [-2\pi, -\pi] \\ \cos x - 2 + c_0 & x \in [\pi, 0] \\ -\cos x + c_0 & x \in [0, \pi] \\ \cos x + 2 + c_0 & x \in [\pi, 2\pi] \\ -\cos x + 4 + c_0 & x \in [2\pi, 3\pi] \\ \cos x + 6 + c_0 & x \in [3\pi, 4\pi] \\ \text{............} & \text{.......} \end{cases}$$

Esercizio 4.2. Calcolare $\int |\cos x| \, dx$.■

Esercizio 4.3. Usando la Proposizione 4.1, provare che $\int \arcsin x dx = x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2} + h$, in $[-1, 1]$.■

xvi) $\int \text{tg}^n x dx$, essendo $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$; se $n = 1$ si ha facilmente che una primitiva di $\text{tg}x = \frac{\sin x}{\cos x}$ è $-\ln|\cos x|$, cosicché possiamo scrivere senza problemi tutte le primitive, dopo aver tenuto conto della forma del dominio di $\text{tg}x$; sia $n \geq 2$; allora si ha la seguente *formula di ricorrenza o iterazione*

$$\int \text{tg}^n x dx = \int \text{tg}^{n-2} x \text{tg}^2 x dx = \int \text{tg}^{n-2} x \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx =$$

$$\int \text{tg}^{n-2} x \frac{1}{\cos^2 x} dx - \int \text{tg}^{n-2} x dx = \frac{\text{tg}^{n-1} x}{n-1} - \int \text{tg}^{n-2} x dx$$

xvii) $\int \frac{px+q}{ax^2+bx+c}dx$, essendo $a \neq 0$; tale integrale si calcola in maniera differente a seconda del valore del Δ del denominatore, distinguendo i casi seguenti

xvii$_1$) $\Delta > 0$; il denominatore ha allora due zeri reali α, β, fra loro diversi; esso può essere scomposto come segue: $ax^2 + bx + c = a(x-\alpha)(x-\beta)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$; è noto (si veda Capitolo 3) che esistono due costanti reali M, H tali che

$$\frac{px+q}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{a}\left(\frac{M}{x-\alpha} + \frac{H}{x-\beta}\right)$$

cosicché il nostro integrale è ricondotto a integrali immediati del tipo $\int \frac{1}{(x-s)^h}dx$ con $s \in \mathbb{R}$ (in questo caso $h = 1$), calcolabili con il Primo Teorema di Sostituzione (si vedano terza e quarta riga della Tabella 2);

xvii$_2$) $\Delta = 0$; il denominatore ha allora uno zero reale α, di molteplicità 2; esso può essere scomposto come segue: $ax^2 + bx + c = a(x-\alpha)^2$ per ogni $x \in \mathbb{R}$; è noto (si veda Capitolo 3) che esistono due costanti reali M, H tali che

$$\frac{px+q}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{a}\left(\frac{M}{x-\alpha} + \frac{H}{(x-\alpha)^2}\right)$$

cosicché il nostro integrale è ancora ricondotto a integrali immediati del tipo $\int \frac{1}{(x-s)^h}dx$ con $s \in \mathbb{R}$ (in questo caso $h = 1, h = 2$);

xvii$_3$) $\Delta < 0$; il denominatore non ha allora zeri reali; per calcolare l'integrale dato supponiamo in un primo momento che $p \neq 0$; procediamo, adesso, come segue

$$\frac{px+q}{ax^2+bx+c} = \frac{p}{2a}\frac{\frac{2a}{p}(px+q)}{ax^2+bx+c} = \frac{p}{2a}\frac{2ax+b-b+\frac{2aq}{p}}{ax^2+bx+c} =$$

$$\frac{p}{2a}\frac{2ax+b}{ax^2+bx+c} + \frac{p}{2a}\frac{-b+\frac{2aq}{p}}{ax^2+bx+c};$$

una primitiva della funzione $\frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}$ è la funzione $\ln|ax^2+bx+c|$ (si veda la terza riga della Tabella 2), cosicché rimane da trovare solo una primitiva della funzione $\frac{-b+\frac{2aq}{p}}{ax^2+bx+c}$ e cioé della funzione $\frac{1}{ax^2+bx+c}$; procediamo come segue

$$\int \frac{1}{ax^2+bx+c}dx = \frac{1}{a}\int \frac{1}{x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}}dx = \frac{1}{a}\int \frac{1}{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{-\Delta}{4a^2}}dx;$$

posto, per semplificare la notazione, $H = \frac{-\Delta}{4a^2} > 0$ abbiamo (alla fine si usi il risultato della sesta riga della Tabella 2)

$$\int \frac{1}{ax^2+bx+c}dx = \frac{1}{a}\int \frac{1}{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+H}dx = \frac{1}{Ha}\int \frac{1}{\left(\frac{x}{\sqrt{H}}+\frac{b}{2a\sqrt{H}}\right)^2+1}dx =$$

$$\frac{1}{a\sqrt{H}}\int \frac{\frac{1}{\sqrt{H}}}{\left(\frac{x}{\sqrt{H}}+\frac{b}{2a\sqrt{H}}\right)^2+1}dx =$$

$$\frac{1}{a\sqrt{H}}\left[\int \frac{1}{t^2+1}dt\right]_{t=\frac{x}{\sqrt{H}}+\frac{b}{2a\sqrt{H}}} = \frac{1}{a\sqrt{H}}\mathrm{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{H}}+\frac{b}{2a\sqrt{H}}\right)+c;$$

se invece $p=0$, allora la funzione da integrare è la funzione $\frac{q}{ax^2+bx+c}$; il calcolo dell'integrale di tale funzione è già stato effettuato, cosicché possiamo dire di aver concluso il calcolo di $\int \frac{px+q}{ax^2+bx+c}dx$.■

xviii) $\int \frac{px+q}{(ax^2+bx+c)^m}dx$, essendo $a \neq 0$ ed $m \in \mathbb{N}, m \geq 2$; tale integrale si calcola in maniera differente a seconda del valore del Δ del polinomio ax^2+bx+c, distinguendo i casi seguenti

xviii$_1$) $\Delta > 0$; il polinomio ax^2+bx+c ha allora due zeri reali α, β, fra loro diversi; esso può essere scomposto come segue: $ax^2+bx+c = a(x-\alpha)(x-\beta)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$; è noto (si veda Capitolo 3) che esistono allora $2m$ costanti reali $M_i, H_i, i=1,2,\ldots m$, tali che

$$\frac{px+q}{(ax^2+bx+c)^m} = \frac{1}{a}\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{M_i}{(x-\alpha)^i}+\frac{H_i}{(x-\beta)^i}\right)$$

cosicché il nostro integrale è, di nuovo, ricondotto a integrali immediati del tipo $\int \frac{1}{(x-s)^h}dx$ con $s \in \mathbb{R}$ (in questo caso $h=i, i=1,2\ldots m$);

xviii$_2$) $\Delta = 0$; il polinomio ax^2+bx+c ha allora uno zero reale α, di molteplicità 2; esso può essere scomposto come segue: $ax^2+bx+c = a(x-\alpha)^2$ per ogni $x \in \mathbb{R}$; è noto (si veda Capitolo 3) che esistono $2m$ costanti reali $M_i, i=1,2\ldots,2m$, tali che

$$\frac{px+q}{(ax^2+bx+c)^m} = \frac{1}{a}\sum_{i=1}^{2m}\frac{M_i}{(x-\alpha)^i}$$

cosicché il nostro integrale è ricondotto sempre a integrali immediati del tipo $\int \frac{1}{(x-s)^h}dx$ con $s \in \mathbb{R}$ (in questo caso $h=i, i=1,2\ldots 2m$);

xviii$_3$) $\Delta < 0$; il polinomio ax^2+bx+c non ha allora zeri reali; per calcolare l'integrale dato supponiamo in un primo momento che $p \neq 0$; procediamo, adesso, come segue

$$\frac{px+q}{(ax^2+bx+c)^m} = \frac{p}{2a}\frac{\frac{2a}{p}(px+q)}{(ax^2+bx+c)^m} = \frac{p}{2a}\frac{2ax+b-b+\frac{2aq}{p}}{(ax^2+bx+c)^m} =$$

$$\frac{p}{2a}\frac{2ax+b}{(ax^2+bx+c)^m}+\frac{p}{2a}\frac{-b+\frac{2aq}{p}}{(ax^2+bx+c)^m};$$

una primitiva della funzione $\frac{2ax+b}{(ax^2+bx+c)^m}$ è la funzione $\frac{1}{(1-m)(ax^2+bx+c)^{m-1}}$ (si veda la quarta riga della Tabella 2), cosicché rimane da trovare solo una primitiva della funzione $\frac{-b+\frac{2aq}{p}}{(ax^2+bx+c)^m}$ e cioé della funzione $\frac{1}{(ax^2+bx+c)^m}$; procediamo come segue

$$\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^m}dx = \frac{1}{a^m}\int \frac{dx}{\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right)^m} = \frac{1}{a^m}\int \frac{dx}{\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{-\Delta}{4a^2}\right]^m};$$

posto, per semplificare la notazione, $H=\frac{-\Delta}{4a^2}>0$ abbiamo

$$\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^m} = \frac{1}{a^m}\int \frac{dx}{\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+H\right]^m} = \frac{1}{(Ha)^m}\int \frac{dx}{\left[\left(\frac{x}{\sqrt{H}}+\frac{b}{2a\sqrt{H}}\right)^2+1\right]^m} =$$

$$\frac{\sqrt{H}}{(Ha)^m}\int \frac{\frac{1}{\sqrt{H}}}{\left[\left(\frac{x}{\sqrt{H}}+\frac{b}{2a\sqrt{H}}\right)^2+1\right]^m}dx = \frac{\sqrt{H}}{(Ha)^m}\left[\int \frac{dt}{(t^2+1)^m}\right]_{t=\frac{x}{\sqrt{H}}+\frac{b}{2a\sqrt{H}}};$$

il calcolo dell'integrale dato viene così ricondotto a quello dell'integrale (vi); se invece $p=0$, allora la funzione da integrare è la funzione $\frac{q}{(ax^2+bx+c)^m}$; il calcolo dell'integrale di tale funzione è già stato effettuato, cosicché possiamo dire di aver concluso il calcolo di $\int \frac{px+q}{(ax^2+bx+c)^m}dx$.■

xix) Possiamo adesso affrontare il problema di determinare una primitiva di una funzione razionale fratta $\frac{A(x)}{B(x)}$ (lasciando al lettore la determinazione di *tutte* le primitive, in funzione della natura dell'insieme di integrazione, in accordo con l'*osservazione importante* fatta all'inizio) dove $A(x), B(x)$ sono due polinomi arbitrari; supponiamo innanzitutto che il polinomio $B(x)$ abbia grado maggiore del polinomio $A(x)$; occorre allora cercare gli zeri reali o complessi del denominatore in modo da poter decomporre $B(x)$ (Capitolo 3) in un prodotto del tipo

$$B(x) = b_0(x-\alpha_1)^{p_1}\dots(x-\alpha_h)^{p_h}\dots(x^2+\beta_1x+\gamma_1)^{q_1}\dots(x^2+\beta_kx+\gamma_k)^{q_k},$$

essendo b_0 il primo coefficiente; quindi la frazione da integrare potrà essere decomposta come segue (Capitolo 3)

$$\frac{A(x)}{B(x)} = \frac{A_{11}}{x-\alpha_1}+\dots\frac{A_{1p_1}}{(x-\alpha_1)^{p_1}}+\dots+\frac{A_{h1}}{x-\alpha_h}+\dots+\frac{A_{hp_h}}{(x-\alpha_h)^{p_h}}+\dots+$$

$$\frac{B_{11}x+C_{11}}{x^2+\beta_1x+\gamma_1}+\dots+\frac{B_{1q_1}x+C_{1q_1}}{(x^2+\beta_1x+\gamma_1)^{q_1}}+\dots+\frac{B_{k1}x+C_{k1}}{x^2+\beta_kx+\gamma_k}+\dots+\frac{B_{kq_k}x+C_{kq_k}}{(x^2+\beta_1x+\gamma_1)^{q_k}}$$

dove le costanti che compaiono nei numeratori devono essere determinate in modo che si abbia l'uguaglianza soprascritta per ogni valore reale di x (tranne ovviamente quelli per cui $B(x)=0$). Il calcolo è allora ricondotto alla determinazione di primitive di funzioni di tipo già studiato.

L'integrazione di una funzione del tipo $\frac{A(x)}{B(x)}$, con grado di $A(x)$ minore del grado di $B(x)$, può essere affrontata facendo ricorso ad un altro metodo di decomposizione, dovuto ad Hermite; sappiamo che

$$B(x) = b_0(x-\alpha_1)^{p_1}\dots(x-\alpha_h)^{p_h}(x^2+\beta_1 x+\gamma_1)^{q_1}\dots(x^2+\beta_k x+\gamma_k)^{q_k};$$

consideriamo allora il polinomio

$$D(x) = b_0(x-\alpha_1)^{p_1-1}\dots(x-\alpha_h)^{p_h-1}(x^2+\beta_1 x+\gamma_1)^{q_1-1}\dots(x^2+\beta_k x+\gamma_k)^{q_k-1}$$

e cerchiamo di determinare un polinomio $Z(x)$ avente grado uguale al grado di $D(x)$ diminuito di una unità, nonché delle costanti $A_1,\dots A_h, B_1,\dots B_k, C_1\dots C_k$ tali che

$$\frac{A(x)}{B(x)} = \frac{A_1}{x-\alpha_1}+\dots+\frac{A_h}{x-\alpha_h}+\frac{B_1 x+C_1}{x^2+\beta_1 x+\gamma_1}+\dots+\frac{B_k x+C_k}{x^2+\beta_k x+\gamma_k}+\frac{d}{dx}\frac{Z(x)}{D(x)}$$

la cui integrazione è immediata.

Se, infine, il polinomio $A(x)$ ha grado maggiore od uguale a quello del polinomio $B(x)$, occorre effettuare la divisione del polinomio $A(x)$ per il polinomio $B(x)$, ottenendo così due altri polinomi $Q(x)$ (il quoziente della divisione) ed $R(x)$ (il resto della divisione che ha grado inferiore al grado di $B(x)$) per i quali si ha

$$A(x) = B(x)Q(x) + R(x)$$

Quindi

$$\int \frac{A(x)}{B(x)}dx = \int \frac{B(x)Q(x)+R(x)}{B(x)}dx = \int Q(x)dx + \int \frac{R(x)}{B(x)}dx$$

Il primo integrale è immediato, perché integrale di un polinomio, mentre il secondo è del tipo già considerato perché, come ricordato, $R(x)$ ha grado inferiore al grado di $B(x)$.

§5. *Il secondo Teorema di Integrazione per Sostituzione.*

Proviamo adesso l'altro fondamentale Teorema di Sostituzione

Secondo Teorema di Integrazione per Sostituzione. *Sia f una funzione reale definita in (a,b), dotata di primitive, e sia g una funzione reale definita in (c,d) ed ivi derivabile a valori su tutto (a,b) ed invertibile. Allora vale la seguente formula di integrazione per sostituzione*

$$\int f(x)dx = \left[\int f(g(t))g'(t)dt\right]_{t=g^{-1}(x)}$$

Dimostrazione. Sia F una primitiva di f; allora $F(g)$ è una primitiva di $f(g(x))g'(x)$ e così $F(g(g^{-1})) = F$ è un elemento dell'insieme al secondo membro della tesi, che quindi risulta non vuoto; allo stesso tempo si ha

$$\int f(x)dx \subseteq \left[\int f(g(t))g'(t)dt\right]_{t=g^{-1}(x)}.$$

D'altra parte, detto H un elemento dell'insieme a secondo membro, deve esistere $G \in \int f(g(t))g'(t)dt$ tale che $H = G(g^{-1})$. Per il precedente teorema deve aversi anche $G = M(g)$ per un'opportuna funzione $M \in \int f(x)dx$; quindi risulta $H = G(g^{-1}) = M(g(g^{-1})) = M$ cosicché H si trova nell'insieme al primo membro; questa ulteriore inclusione conclude la dimostrazione.$\blacksquare$

Applichiamo adesso il Secondo Teorema di Sostituzione per calcolare alcuni importanti integrali.

In tutti gli integrali che adesso consideremo R denoterà una funzione razionale fratta di una o più variabili; per ogni tipo di integrale considerato indicheremo come il Secondo Teorema di Sostituzione deve essere applicato, usando le stesse notazioni del citato Teorema; supporremo anche che la funzione integranda sia definita sempre in unico intervallo (a, b); nel caso in cui il suo dominio sia unione di più intervalli dobbiamo procedere applicando il metodo indicato alle sue restrizioni ai vari intervalli.Dopo avere applicato il suddetto Teorema di Sostituzione il calcolo dell'integrale sarà sempre ricondotto a quello di una funzione razionale fratta.

xx) $\int R(e^x)dx$; si ha $f(x) : (a, b) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; tale integrale si calcola ponendo $g(t) = \ln t$, che è invertibile nel proprio dominio $]0, +\infty[$; la funzione inversa, come è noto, è $g^{-1}(x) = e^x$; di solito occorre considerare g ristretta ad un opportuno intervallo (c, d) in modo che essa risulti suriettiva; si noti che un tale intervallo esiste sempre; infatti, $g :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ è continua, suriettiva ed iniettiva e quindi assume tutti i valori reali una sola volta; ne viene che assegnato $(a, b) \subset \mathbb{R}$ esiste un unico (c, d) tale che $g[(c, d)] = (a, b)$.

Esempio 5.1. Si calcoli $\int \frac{dx}{e^x-1}$; si ha

$$f(x) = \frac{1}{e^x - 1} :]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[\to \mathbb{R}.$$

La natura del dominio di f implica che occorre applicare due volte il metodo suggerito, una volta ad f ristretta all'intervallo $]-\infty, 0[$, l'altra ad f ristretta all'intervallo $]0, +\infty[$; operiamo dapprima in $]-\infty, 0[$; in questo caso scegliamo, come suggerito, $g(t) = \ln t : (c, d) =]0, 1[\to]-\infty, 0[$, in modo che tale g sia suriettiva (l'iniettività è garantita dall'iniettività di $\ln t$ nel proprio dominio); abbiamo così che il nuovo integrale da calcolare è

$$\int f(g(t))g'(t)dt = \int \frac{dt}{t(t-1)} = \int \left(\frac{-1}{t} + \frac{1}{t-1}\right) dt =$$

$$-\ln t + \ln|t-1| + c_1 \qquad t \in]0,1[.$$

Adesso operiamo in $]0,+\infty[$; in questo caso scegliamo, sempre come suggerito, $g(t) = \ln t : (c,d) =]1,+\infty[\to]0,+\infty[$, in modo che tale g sia suriettiva (l'iniettività è garantita dall'iniettività di $\ln t$ nel proprio dominio); è facile vedere che il calcolo "bruto" del nuovo integrale è uguale a quello dell'integrale studiato in precedenza, cosicché abbiamo

$$\int f(g(t))g'(t)dt = -\ln t + \ln|t-1| + c_2 \qquad t \in]1,+\infty[;$$

allora avremo, facendo uso di g^{-1}, la seguente uguaglianza

$$\int \frac{dx}{e^x - 1} = \begin{cases} -x + \ln|e^x - 1| + c_1 & x \in]-\infty, 0[\\ -x + \ln|e^x - 1| + c_2 & x \in]0, +\infty[\end{cases}$$

che conclude il nostro studio.■

xxi) $\int R(\sin^2 x, \cos^2 x, \sin x \cos x)dx$ con $x \in (a,b) \subset]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[$, per qualche $k \in \mathbb{Z}$; innanzitutto trasformiamo la funzione integranda attraverso le note formule parametriche seguenti

$$\sin^2 x = \frac{\mathrm{tg}^2 x}{1 + \mathrm{tg}^2 x}, \quad \cos^2 x = \frac{1}{1 + \mathrm{tg}^2 x}, \quad \sin x \cos x = \frac{\mathrm{tg} x}{1 + \mathrm{tg}^2 x} \tag{5.1}$$

(esse possono essere applicate senza problemi perché $x \neq \frac{\pi}{2} + h\pi, h \in \mathbb{Z}$) e poi calcoliamo l'integrale ponendo $g(t) = k\pi + \mathrm{arctg}t$; la funzione inversa, come è noto, è la restrizione della funzione $\mathrm{tg}x$ all'intervallo $]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[$; la funzione g scelta è continua ed invertibile in $\mathbb{R}$ a valori su $]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[$, cosicché esiste sempre un unico intervallo (c,d) la cui immagine mediante g è tutto (a,b).

Osservazione 5.1. Relativamente all'integrale (xxi) adesso considerato, notiamo che può accadere che la funzione integranda sia definita in un intervallo che contenga punti del tipo $\frac{\pi}{2} + k\pi$, dove non è possibile usare le sostituzioni (5.1) indicate; occorre allora considerare la restrizione della funzione data a intervalli del tipo $]k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}[$, procedendo in ognuno di essi con il metodo indicato e trovando le primitive delle restrizioni della funzione data a tali intervalli; avendo trovato le primitive nel dominio privato dei punti del tipo $k\pi + \frac{\pi}{2}$, occorre poi cercare di definirle in tali punti "incollando" le primitive già ottenute in modo da avere una funzione continua anche nei punti del tipo $\frac{\pi}{2} + k\pi$ che grazie alla Proposizione 4.1 sarà la primitiva cercata.

Esempio 5.2. Calcoliamo il seguente integrale indefinito $\int \frac{\cos^2 x}{1+2\sin x \cos x}dx$, essendo $f(x) = \frac{\cos^2 x}{1+2\sin x \cos x}$ con $x \in]-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}[$; è facile vedere che in tale intervallo la funzione integranda risulta definita e continua; dalla continuità segue, come già annunciato, che essa ha primitive definite in tutto l'intervallo considerato. Poiché tale intervallo contiene il punto $\frac{\pi}{2}$ in cui la funzione tg$x$ non è definita, per poter seguire il metodo indicato dobbiamo considerare gli intervalli $]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}[$ e $]\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4}[$ e integrare la funzione f ristretta ad ognuno dei due; cominciamo operando sulla restrizione all'intervallo $]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}[$; con le sostituzioni (5.1) l'integrale dato viene trasformato come segue

$$\int \frac{\cos^2 x}{1+2\sin x\cos x}dx = \int \frac{\frac{1}{1+\mathrm{tg}^2 x}}{1+\frac{2\mathrm{tg}x}{1+\mathrm{tg}^2 x}}dx = \int \frac{1}{1+\mathrm{tg}^2 x+2\mathrm{tg}x}dx;$$

in questo caso dovremo scegliere $g(t)=\mathrm{arctg}t : (c,d) =]-1,+\infty[\to]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}[$, in modo da poter garantire la suriettività della g considerata (che è invece sempre iniettiva); otterremo così il nuovo integrale

$$\int \frac{1}{(1+t^2+2t)(t^2+1)}dt = \int \frac{1}{(1+t)^2(t^2+1)}dt =$$

$$\int \left(\frac{A}{t+1}+\frac{B}{(t+1)^2}+\frac{Ct+D}{t^2+1}\right)dt =$$

$$\int \frac{A(t+1)(t^2+1)+B(t^2+1)+(Ct+D)(t+1)^2}{(t+1)^2(t^2+1)}dt;$$

si ricava quindi il sistema seguente

$$\begin{cases} A+C=0 \\ A+B+2C+D=0 \\ A+C+2D=0 \\ A+B+D=1 \end{cases}$$

risolvendo il quale si ha

$$A=B=\frac{1}{2}, C=-\frac{1}{2}, D=0;$$

ne segue che

$$\int \frac{\cos^2 x}{1+2\sin x\cos x}dx = \left[\int \left(\frac{\frac{1}{2}}{t+1}+\frac{\frac{1}{2}}{(t+1)^2}+\frac{-\frac{1}{2}t}{t^2+1}\right)dt\right]_{t=\mathrm{tg}x_{|]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}[}} =$$
$$\frac{1}{2}\log(\mathrm{tg}x+1)-\frac{\frac{1}{2}}{\mathrm{tg}x+1}-\frac{1}{4}\log(\mathrm{tg}^2 x+1)+c_1.$$

Integrando adesso in modo analogo nell'altro intervallo, cioé in $]\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4}[$, con la sostituzione $g(t)=\pi+\mathrm{arctg}t : (c,d) =]-\infty,1[\to]\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4}[$, in modo da poter garantire la suriettività della g considerata (che è invece sempre iniettiva), si ottiene che

$$\int \frac{\cos^2 x}{1+2\sin x\cos x}dx = \left[\int\left(\frac{\frac{1}{2}}{t+1} + \frac{\frac{1}{2}}{(t+1)^2} + \frac{-\frac{1}{2}t}{t^2+1}\right)dt\right]_{t=\mathrm{tg}x_{|]\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4}[}} =$$

$$\frac{1}{2}\log(\mathrm{tg}x+1) - \frac{\frac{1}{2}}{\mathrm{tg}x+1} - \frac{1}{4}\log(\mathrm{tg}^2 x+1) + c_2.$$

Pertanto le primitive della funzione iniziale sono, in tutto $]-\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}[$ con l'esclusione del punto $x=\frac{\pi}{2}$, del tipo seguente

$$G(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\log(\mathrm{tg}x+1) - \frac{1}{2(\mathrm{tg}x+1)} - \frac{1}{4}\log(\mathrm{tg}^2x+1) + c_1 & x\in]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}[\\ \frac{1}{2}\log(\mathrm{tg}x+1) - \frac{1}{2(\mathrm{tg}x+1)} - \frac{1}{4}\log(\mathrm{tg}^2x+1) + c_2 & x\in]\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4}[\end{cases}$$

Tuttavia essendo la funzione di partenza definita e continua in tutto l'intervallo $]-\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}[$, anche le primitive dovranno essere definite nello stesso intervallo e dovranno essere determinate a meno di un'unica costante additiva, mentre il precedente calcolo fornisce primitive non definite nel punto $x=\frac{\pi}{2}$ e con due, apparentemente non correlate, costanti additive; ora occorre determinare il valore delle primitive trovate anche in $x=\frac{\pi}{2}$; ciò sarà fatto applicando la Proposizione 4.1 alla funzione f data ed alla G trovata; essendo G derivabile, essa deve essere continua ed allora deve aversi l'uguaglianza seguente

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} G(x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} G(x) = G\left(\frac{\pi}{2}\right);$$

si ha, quindi

$$G\left(\frac{\pi}{2}\right) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} G(x) =$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{1}{2}\log(\mathrm{tg}x+1) - \frac{1}{2(\mathrm{tg}x+1)} - \frac{1}{4}\log(\mathrm{tg}^2x+1) + c_1 =$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \log\frac{\sqrt{\mathrm{tg}x+1}}{\sqrt[4]{\mathrm{tg}^2x+1}} - \frac{1}{2(\mathrm{tg}x+1)} + c_1 = c_1$$

ed anche

$$G\left(\frac{\pi}{2}\right) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} G(x) =$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} \frac{1}{2}\log(\mathrm{tg}x+1) - \frac{1}{2(\mathrm{tg}x+1)} - \frac{1}{4}\log(\mathrm{tg}^2x+1) + c_2 =$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} \log\frac{\sqrt{\mathrm{tg}x+1}}{\sqrt[4]{\mathrm{tg}^2x+1}} - \frac{1}{2(\mathrm{tg}x+1)} + c_2 = c_2.$$

Ne segue allora che $c_1 = c_2$ e quindi la forma delle primitive cercate è la seguente

$$G(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\log(\mathrm{tg}x+1) - \frac{1}{2(\mathrm{tg}x+1)} - \frac{1}{4}\log(\mathrm{tg}^2x+1) + c_1 & x\in]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}[\\ c_1 & x=\frac{\pi}{2} \\ \frac{1}{2}\log(\mathrm{tg}x+1) - \frac{1}{2(\mathrm{tg}x+1)} - \frac{1}{4}\log(\mathrm{tg}^2x+1) + c_1 & x\in]\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4}[\end{cases}$$

(si noti che la Proposizione 4.1 garantisce che la G trovata con tale procedimento è effettivamente una primitiva della funzione f iniziale).■

Esempio 5.3. Si voglia calcolare l'integrale indefinito seguente $\int \frac{dx}{\cos^2 x+\sin 2x+1}$ con $x \in [0,\pi]$. Osserviamo innanzitutto che, essendo $\cos^2 x \geq 0$ e $\sin 2x + 1 \geq 0$, il denominatore si annulla se e solo se $\cos^2 x = 0$ e $\sin 2x + 1 = 0$, un fatto che in $[0, \pi]$ non si verifica mai; quindi la funzione f data è continua in $[0, \pi]$. Cerchiamo, ora, di calcolare una primitiva della funzione integranda; facendo uso delle sostituzioni (5.1) sopra richiamate otterremo

$$\frac{1}{\cos^2 x + \sin 2x + 1} = \frac{\mathrm{tg}^2 x + 1}{\mathrm{tg}^2 x + 2\mathrm{tg} x + 2} \qquad \forall x \in [0, \pi] \setminus \{\frac{\pi}{2}\}.$$

Occorre quindi trovare primitive della restrizione della funzione $\frac{\mathrm{tg}^2 x+1}{\mathrm{tg}^2 x+2\mathrm{tg}x+2}$ agli intervalli $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ e $\left]\frac{\pi}{2}, \pi\right]$. Eseguendo la sostituzione $g(t) = \mathrm{arctg} t : (c, d) = [0, +\infty[\to [0, \frac{\pi}{2}[$ nel caso della prima restrizione e $g(t) = \pi + \mathrm{arctg} t : (c, d) =]-\infty, 0[\to \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ nel caso della seconda restrizione, in modo da garantire entrambe le volte la suriettività di g, avremo (si noti che il calcolo "bruto" dell'integrale è lo stesso per i due casi considerati)

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x + \sin 2x + 1} = \int \left(\frac{\mathrm{tg}^2 x + 1}{\mathrm{tg}^2 x + 2\mathrm{tg} x + 2}\right) dx = \left[\int \frac{dt}{(t+1)^2 + 1}\right]_{t = \mathrm{tg}x_{|]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[}}$$

nel primo caso, mentre nel secondo avremo

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x + \sin 2x + 1} = \int \left(\frac{\mathrm{tg}^2 x + 1}{\mathrm{tg}^2 x + 2\mathrm{tg} x + 2}\right) dx = \left[\int \frac{dt}{(t+1)^2 + 1}\right]_{t = \mathrm{tg}x_{|]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[}}$$

da cui si ricava che una primitiva della funzione di partenza, in $[0, \pi] \setminus \{\frac{\pi}{2}\}$, è la funzione $F(x) = \mathrm{arctg}(\mathrm{tg}x+1)$; allora la famiglia delle primitive cercate sarà costituita dalle funzioni uguali a $\mathrm{arctg}(\mathrm{tg}x + 1) + c_1$ in $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ ed a $\mathrm{arctg}(\mathrm{tg}x + 1) + c_2$ in $\left]\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ essendo c_1 e c_2 due costanti, in generale, differenti. Osserviamo, però, che la funzione di partenza è definita e continua in $[0, \pi]$; ogni sua primitiva deve perciò essere anch'essa definita e continua in $[0, \pi]$ il che implica che dobbiamo ancora effettuare il calcolo delle primitive nel punto $\frac{\pi}{2}$. Applichiamo nuovamente la Proposizione 4.1; detta $G(x)$ una tale primitiva, deve risultare G continua in $\frac{\pi}{2}$; quindi, occorre calcolare i seguenti limiti ed uguagliarne i valori

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} G(x) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \mathrm{arctg}(\mathrm{tg}x + 1) + c_1 = \frac{\pi}{2} + c_1$$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} G(x) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \mathrm{arctg}(\mathrm{tg}x + 1) + c_2 = -\frac{\pi}{2} + c_2$$

da cui segue che

$$\frac{\pi}{2}+c_1=-\frac{\pi}{2}+c_2 \Rightarrow c_2=\pi+c_1.$$

Tutte le primitive cercate si scriveranno allora come segue

$$G(x)=\begin{cases} \mathrm{arctg}(\mathrm{tg}x+1)+c_1 & x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[\\ \frac{\pi}{2}+c_1 & x=\frac{\pi}{2} \\ \mathrm{arctg}(\mathrm{tg}x+1)+\pi+c_1 & x\in\left]\frac{\pi}{2},\pi\right] \end{cases}$$

Il nostro calcolo è così concluso.■

xxiii) $\int R(\sin x,\cos x)dx$ con $x\in(a,b)\subset]-\pi+2k\pi,\pi+2k\pi[$, per qualche $k\in\mathbb{Z}$; innanzitutto trasformiamo la funzione integranda attraverso le note formule parametriche seguenti

$$\sin x=\frac{2\mathrm{tg}\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}},\quad \cos x=\frac{1-\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}} \tag{5.2}$$

e poi calcoliamo l'integrale ponendo $g(t)=2k\pi+2\mathrm{arctg}t:\mathbb{R}\to]-\pi+2k\pi,\pi+2k\pi[$; la funzione inversa, come noto, è la restrizione della funzione $\mathrm{tg}(\frac{x}{2})$ all'intervallo $]2k\pi-\pi,2k\pi+\pi[$; anche in questo caso, come nei precedenti, la regolarità di g implica che esiste sempre $(c,d)\subset\mathbb{R}$ che viene mandato su tutto (a,b) da g. Si noti che una osservazione (si veda l'Osservazione 5.1) simile a quella relativa al precedente tipo di integrali può essere fatta in questo caso.

xxiii) $\int R\left(x,\ \sqrt[p_1]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}},\ \sqrt[p_2]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}},\dots\ \sqrt[p_n]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}\right)dx$, essendo $p_1,p_2,\dots p_n\in\mathbb{N},p_1,p_2,\dots p_n\geq 2$ e $\alpha^2+\gamma^2>0$. Innanzitutto osserviamo che se $\alpha\delta-\beta\gamma=0$, allora esiste una costante $k\neq 0$ tale che $\sqrt[h]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}=\sqrt[h]{k}$ cosicché non si ha alcuna irrazionalità; infatti, supponendo in un primo caso $\alpha\neq 0,\gamma=0$ si ha $\alpha\delta=0$ e quindi, dovendo essere $\delta\neq 0$, risulta $\alpha=0$, da cui segue che $\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}=\frac{\beta}{\delta}$ (in modo analogo si procede se $\alpha=0,\gamma\neq 0$); se poi $\alpha\neq 0,\gamma\neq 0$, da $\alpha\delta-\beta\gamma=0$ otteniamo che esiste $k\in\mathbb{R}$ tale che $\alpha=k\gamma, b=kd$ e quindi $\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}=k$. Per avere quindi un integrale di tipo effettivamente nuovo dobbiamo supporre che $\alpha\delta-\beta\gamma\neq 0$. Sia $\alpha\delta-\beta\gamma>0$ (in modo analogo si procede se $\alpha\delta-\beta\gamma<0$). In un primo momento ammettiamo che $\alpha,\gamma>0$ (a questo può essere facilmente ricondotto il caso $\alpha,\gamma<0$); data la funzione $h(x)=\sqrt[s]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}$, con $s=m.c.m.(p_1,p_2,\dots p_n)$, si trova facilmente che il suo dominio è $X=\left]-\infty,\frac{-\delta}{\gamma}\right[\cup\left[\frac{-\beta}{\alpha},+\infty\right[$ (si usi il fatto che da $\alpha\delta-\beta\gamma>0,\alpha,\gamma>0$, segue che $\frac{-\beta}{\alpha}>\frac{-\delta}{\gamma}$); inoltre h è continua e con derivata positiva in $X\setminus\{\frac{-\beta}{\alpha}\}$; poiché

$$h\left(\left]-\infty,\frac{-\delta}{\gamma}\right[\right)=\left]\sqrt[s]{\frac{\alpha}{\gamma}},+\infty\right[,\quad h\left(\left[\frac{-\beta}{\alpha},+\infty\right[\right)=\left[0,\sqrt[s]{\frac{\alpha}{\gamma}}\right[$$

si ha che h risulta invertibile in tutto X. Se allora l'intervallo (a,b) in cui vogliamo applicare il Secondo Teorema di Sostituzione è un sottointervallo di $\left]-\infty, \frac{-\delta}{\gamma}\right[$ scegliamo $(c,d) \subset \left]\sqrt[s]{\frac{\alpha}{\gamma}}, +\infty\right[$ in modo che la funzione $g(t) = h^{-1}(t) = \frac{\beta - \delta t^s}{\gamma t^s - \alpha}$ sia suriettiva da (c,d) su (a,b), mentre se l'intervallo (a,b) è un sottointervallo di $\left[\frac{-\beta}{\alpha}, +\infty\right[$ scegliamo $(c,d) \subset \left[0, \sqrt[s]{\frac{\alpha}{\gamma}}\right[$ in modo che la funzione $g(t) = h^{-1}(t) = \frac{\beta - \delta t^s}{\gamma t^s - \alpha}$ sia suriettiva da (c,d) su (a,b); si noti che tale scelta di (c,d) è sempre possibile, grazie alla continuità ed invertibilità di g. La sostituzione indicata garantisce che

$$\sqrt[p_i]{\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}} = t^{\frac{s}{p_i}}, \qquad \forall i = 1, 2, \dots n,$$

essendo $\frac{s}{p_i}$ un intero positivo. Supponiamo adesso che $\alpha > 0 > \gamma$ (a questo può essere facilmente ricondotto il caso $\alpha < 0 < \gamma$); data la funzione $h(x) = \sqrt[s]{\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}}$, con $s = m.c.m.(p_1, p_2, \dots p_n)$, si trova facilmente che il suo dominio è $X = \left[\frac{-\beta}{\alpha}, \frac{-\delta}{\gamma}\right[$ (si usi il fatto che da $\alpha\delta - \beta\gamma > 0, \alpha > 0 > \gamma$, segue che $\frac{-\beta}{\alpha} < \frac{-\delta}{\gamma}$); inoltre h è continua e con derivata positiva in $X \setminus \{\frac{-b}{\alpha}\}$ cosicché essa è iniettiva nel proprio dominio; inoltre

$$h\left(\left[\frac{-\beta}{\alpha}, \frac{-\delta}{\gamma}\right[\right) = [0, +\infty[;$$

scegliamo allora $(c,d) \subset [0, +\infty[$ tale che $g(t) = h^{-1}(t)$ sia suriettiva (anche qui possiamo affermare che un siffatto intervallo (c,d) esiste sempre).

Esempio 5.4. Calcoliamo il seguente integrale

$$\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{3x-2}{3x+1}}dx;$$

notiamo intanto che la funzione $f(x) = \frac{1}{x}\sqrt{\frac{3x-2}{3x+1}}$ è definita in $\left]-\infty, -\frac{1}{3}\right[\cup \left[\frac{2}{3}, +\infty\right[$; cercheremo pertanto di applicare il Secondo Teorema di Sostituzione, con la sostituzione sopra indicata, due volte, prima con $x \in \left]-\infty, -\frac{1}{3}\right[$ e poi con $x \in \left[\frac{2}{3}, +\infty\right[$; osserviamo anche che la funzione $\psi(x) = \sqrt{\frac{3x-2}{3x+1}}$ è crescente in ognuno dei due intervalli considerati, perché $\psi'(x) > 0$ (il calcolo viene lasciato al lettore), e quindi risulta in essi invertibile; inoltre si ha

$$\psi\left(\left]-\infty, -\frac{1}{3}\right[\right) =]1, +\infty[, \quad \psi\left(\left]\frac{2}{3}, +\infty\right[\right) = [0, 1[$$

(cosicché ψ risulta invertibile addirittura in tutto il proprio dominio); poniamo una volta

$$g(t) = \psi^{-1}(t) : [0, 1[\xrightarrow{su} \left]\frac{2}{3}, +\infty\right[$$

ed un'altra volta

$$g(t) = \psi^{-1}(t) :]1, +\infty[\xrightarrow{su} \left]-\infty, -\frac{1}{3}\right[;$$

il nuovo integrale da calcolare sarà, in entrambi i casi, il seguente

$$\left[6\int \frac{t^2}{(2+t^2)(1-t^2)}dt\right]_{t=g^{-1}(x)=\psi(x)};$$

eseguendo gli usuali calcoli (che vengono lasciati al lettore) si arriva a trovare la seguente famiglia di primitive

$$G(x)=\begin{cases} \ln\left|\frac{1+\sqrt{\frac{3x-2}{3x+1}}}{1-\sqrt{\frac{3x-2}{3x+1}}}\right| - 2\sqrt{2}\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{3x-2}{2(3x+1)}}+c_1 & x\in\left]-\infty,-\frac{1}{3}\right[\\ \ln\left|\frac{1+\sqrt{\frac{3x-2}{3x+1}}}{1-\sqrt{\frac{3x-2}{3x+1}}}\right| - 2\sqrt{2}\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{3x-2}{2(3x+1)}}+c_2 & x\in\left]\frac{2}{3},+\infty\right[\end{cases}$$

che completa l'esempio.■

xxiv) $\int R(\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma},x)dx$; possiamo supporre che $\alpha\neq 0$, altrimenti ricadiamo nello studio di un caso particolare dell'integrale (xxiii).

Supponiamo innanzitutto che $\alpha>0$ e osserviamo che, come già visto quando sono state studiate le equazioni di secondo grado, si ha l'uguaglianza

$$\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}=\sqrt{\alpha}\sqrt{\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2-\frac{\Delta}{4\alpha^2}}$$

Se ora $\Delta=0$, si ha che

$$\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}=\sqrt{\alpha}\left|x+\frac{\beta}{2\alpha}\right|$$

il che riduce l'integrale a quello di una funzione razionale fratta, priva di irrazionalità.

Supponiamo, ora, che sia $\Delta>0$; allora la funzione $h(x)=\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}$ è definita nell'insieme $X=\left]-\infty,\frac{-\beta-\sqrt{\Delta}}{2\alpha}\right]\cup\left[\frac{-\beta+\sqrt{\Delta}}{2\alpha},+\infty\right[$; quindi la funzione integranda sarà definita in un intervallo $(a,b)\subset\left]-\infty,\frac{-\beta-\sqrt{\Delta}}{2\alpha}\right]$ oppure $(a,b)\subset\left[\frac{-\beta+\sqrt{\Delta}}{2\alpha},+\infty\right[$; nel primo caso porremo

$$g(t)=-\sqrt{\frac{\Delta}{4\alpha^2}}\cosh t-\frac{\beta}{2\alpha}:[0,+\infty[\to\left]-\infty,\frac{-\beta-\sqrt{\Delta}}{2\alpha}\right]$$

mentre nel secondo porremo

$$g(t)=\sqrt{\frac{\Delta}{4\alpha^2}}\cosh t-\frac{\beta}{2\alpha}:[0,+\infty[\to\left[\frac{-\beta+\sqrt{\Delta}}{2\alpha},+\infty\right[$$

in modo da avere sempre

$$f(g(t))=\sqrt{\frac{\Delta}{4\alpha^2}(\cosh^2 t-1)}=\sqrt{\frac{\Delta}{4\alpha^2}}\sinh t$$

nel nuovo integrale. Si noti che in entrambi i casi la g considerata è derivabile ed iniettiva; scegliamo, poi, $(c,d)\subset[0,+\infty[$ in modo che $g[(c,d)]=(a,b)$, fatto sempre possibile per le stesse motivazioni addotte per lo studio dei precedenti integrali.

Esempio 5.5. Calcoliamo l'integrale $\int \sqrt{x^2+x-2}dx$, con la funzione integranda definita in $]-\infty,-2] \cup [1,+\infty[$; dobbiamo allora applicare il metodo sopra descritto due volte, la prima alla funzione integranda ristretta all'intervallo $]-\infty,-2]$, la seconda alla funzione integranda ristretta all'intervallo $[1,+\infty[$; poiché si ha

$$\sqrt{x^2+x-2} = \sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}}$$

poniamo

$$g(t) = -\frac{3}{2}\cosh t - \frac{1}{2} : [0,+\infty[\xrightarrow{su}]-\infty,-2]$$

nel primo caso, e

$$g(t) = \frac{3}{2}\cosh t - \frac{1}{2} : [0,+\infty[\xrightarrow{su} [1,+\infty[$$

nel secondo; in entrambi i casi il nuovo integrale sarà il seguente

$$\int f(g(t))g'(t)dt = \int \frac{9}{4}\sinh^2 t dt = \frac{9}{4}\int \frac{e^{2t}+e^{-2t}-2}{4}dt = \frac{9}{16}\left[\frac{e^{2t}}{2} - \frac{e^{-2t}}{2} - 2t\right] + c;$$

otteniamo così

$$\int \sqrt{x^2+x-2}dx = \begin{cases} \frac{9}{16}\left[\frac{e^{2t}}{2} - \frac{e^{-2t}}{2} - 2t\right]_{|t=\text{settcosh}\left(-\frac{2}{3}\text{x}-\frac{1}{3}\right)} + c_1 & x \in]-\infty,-2] \\ \frac{9}{16}\left[\frac{e^{2t}}{2} - \frac{e^{-2t}}{2} - 2t\right]_{|t=\text{settcosh}\left(\frac{2}{3}\text{x}+\frac{1}{3}\right)} + c_2 & x \in [1,+\infty[\blacksquare \end{cases}$$

Se, infine, $\Delta < 0$, h è definita in $\mathbb{R}$ e quindi la funzione integranda sarà definita in un intervallo $(a,b) \subset \mathbb{R}$; in questo caso porremo

$$g(t) = \sqrt{\frac{-\Delta}{4\alpha^2}}\sinh t - \frac{\beta}{2\alpha} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

(tale g è derivabile ed iniettiva in $\mathbb{R}$; esiste poi un unico $(c,d) \subset \mathbb{R}$ tale che $g_{|(c,d)}$ sia suriettiva) in modo da avere

$$f(g(t)) = \sqrt{\frac{-\Delta}{4\alpha^2}(\sinh^2 t + 1)} = \sqrt{\frac{-\Delta}{4\alpha^2}}\cosh t$$

nel nuovo integrale.

Se $\alpha < 0$, osserviamo innanzitutto che essendo il trinomio sotto radice quadrata ed avendo primo coefficiente negativo, il suo Δ deve essere necessariamente positivo; come nel caso precedente si ha

$$\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma} = \sqrt{-\alpha}\sqrt{\frac{\Delta}{4\alpha^2} - \left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2} : \left[\frac{-\beta+\sqrt{\Delta}}{2\alpha}, \frac{-\beta-\sqrt{\Delta}}{2\alpha}\right] \to \left[0, \frac{-\Delta}{4a}\right];$$

si pone poi

$$g(t) = \pm\sqrt{\frac{\Delta}{4\alpha^2}}\sin t - \frac{\beta}{2\alpha} : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \xrightarrow{su} \left[\frac{-\beta+\sqrt{\Delta}}{2\alpha}, \frac{-\beta-\sqrt{\Delta}}{2\alpha}\right]$$

in modo da avere
$$f(g(t)) = \sqrt{-\alpha}\sqrt{\frac{\Delta}{4\alpha^2}(1-\sin^2 t)} = \sqrt{-\alpha}\sqrt{\frac{\Delta}{4\alpha^2}}\cos t$$
nel nuovo integrale.

In ognuna delle sostituzioni considerate la derivabilità e la invertibilità della funzione g scelta è evidente; la suriettività viene poi garantita scegliendo opportunamente, il che è sempre possibile, l'intervallo $(c,d) \subset \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Può essere fatta anche la scelta $g(t) =\pm \sqrt{\frac{\Delta}{4\alpha^2}}\cos t - \frac{\beta}{2\alpha} : [0,\pi] \to \mathbb{R}$, con osservazioni simili alle precedenti.

xxv) Presentiamo altre sostituzioni con le quali si può realizzare lo studio dell'integrale $\int R(\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}, x)dx$; possiamo ancora supporre che $\alpha \neq 0$, altrimenti ricadiamo nello studio di un caso particolare dell'integrale (xxiii), e $\Delta \neq 0$ altrimenti l'irrazionalità scompare.

Supponiamo, dapprima, che $\alpha > 0$ e che $\Delta > 0$; allora deve accadere che
$$x \leq \frac{-\beta-\sqrt{\Delta}}{2\alpha} \quad \text{oppure che} \quad x \geq \frac{-\beta+\sqrt{\Delta}}{2\alpha};$$
poniamo intanto
$$\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma} = \sqrt{\alpha}(x+t) \Rightarrow t = \sqrt{x^2+\frac{\beta}{\alpha}x+\frac{\gamma}{\alpha}} - x = \psi(x)$$
Non è difficile vedere che ψ è invertibile nel proprio dominio e che
$$\psi\left(\left]-\infty, \frac{-\beta-\sqrt{\Delta}}{2\alpha}\right]\right) = \left[\frac{\beta+\sqrt{\Delta}}{2\alpha}, +\infty\right[, \quad \psi\left(\left[\frac{-\beta+\sqrt{\Delta}}{2\alpha}, +\infty\right[\right) = \left[\frac{\beta-\sqrt{\Delta}}{2\alpha}, \frac{\beta}{2\alpha}\right[$$
(le dimostrazioni vengono lasciate al lettore). Poniamo poi $g(t) = \psi^{-1}(t) = \frac{\alpha t^2-\gamma}{\beta-2\alpha t}$, osservando che esiste senz'altro $(c,d) \subset \left[\frac{\beta-\sqrt{\Delta}}{2\alpha}, \frac{\beta}{2\alpha}\right[\cup \left[\frac{\beta+\sqrt{\Delta}}{2\alpha}, +\infty\right[$ tale che $g[(c,d)] = (a,b)$, grazie alle buone proprietà di cui gode g.

Sia adesso $\alpha > 0$ e $\Delta < 0$; abbiamo così che $x \in \mathbb{R}$; la stessa posizione fatta sopra
$$\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma} = \sqrt{\alpha}(x+t) \Rightarrow t = \sqrt{x^2+\frac{\beta}{\alpha}x+\frac{\gamma}{\alpha}} - x = \psi(x)$$
con $\psi : \mathbb{R} \to \left]\frac{\beta}{2\alpha}, +\infty\right[$ (ancora una volta ψ è iniettiva) e poi la scelta $g = \psi^{-1}$ (definita in un opportuno sottointervallo (c,d) del proprio dominio in modo da garantirne la suriettività) permettono di calcolare l'integrale.

Le seguenti altre posizioni conducono, con lo stesso procedimento, alla definizione di altrettanto buone funzioni g:

$$\sqrt{\alpha x^2+\beta x+c}=\sqrt{\alpha}(x-t) \quad \text{oppure} \quad \sqrt{\alpha x^2+\beta x+c}=\sqrt{\alpha}(t-x).$$

Infine, sia $\alpha < 0$; poiché il trinomio deve essere positivo (in almeno un intervallo), occorre che $\Delta > 0$; esistono allora due zeri distinti x_1, x_2 del trinomio, con $x_1 < x_2$; quindi deve essere $(a,b) \subset [x_1, x_2]$; facciamo la posizione

$$\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}=\sqrt{-\alpha}(x-x_1)t \Rightarrow t=\sqrt{\frac{x_2-x}{x-x_1}}=\psi(x):]x_1,x_2]\to]0,+\infty[;$$

è facile vedere che ψ è decrescente, quindi iniettiva; ancora una volta, nel Secondo Teorema di Sostituzione, poniamo $g=\psi^{-1}$, definita in un opportuno sottointervallo (c,d) del proprio dominio $]0,+\infty[$ che garantisca la suriettività; come in tutti i casi precedenti tale intervallo esiste sempre grazie alle buone proprietà di cui gode g.

In maniera analoga è possibile porre

$$\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}=\sqrt{-\alpha}(x_2-x)t \Rightarrow t=\sqrt{\frac{x-x_1}{x_2-x}}=\psi(x):[x_1,x_2[\to]0,+\infty[;$$

in questo caso ψ è crescente e quindi iniettiva; ancora $g=\psi^{-1}$.

xxvi) $\int x^m(a+bx^n)^p dx$ (detti *integrali differenziali binomi*), con $m,n,p \in \mathbb{Q}$ ed $a,b>0$; Chebychev ha provato che essi possono essere calcolati con sostituzioni che li trasformano in integrali di funzioni razionali fratte se e solo se uno dei tre numeri seguenti è un intero

$$p, \quad \frac{m+1}{n}, \quad \frac{m+1}{n}+p;$$

precisamente, se $p \in \mathbb{Z}$ si pone $g(t)=t^k:[0,+\infty[\to[0,+\infty[$ essendo k il minimo comune multiplo dei denominatori di m ed n; se $\frac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}$ si pone $a+bx^n=t^s$, essendo s il denominatore di p, da cui si ricava $g(t)=\left(\frac{t^s-a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}:[a^{\frac{1}{s}},+\infty[\to[0,+\infty[$; infine, se $\frac{m+1}{n}+p \in \mathbb{Z}$ si pone $\frac{a+bx^n}{x^n}=t^s$, essendo s il denominatore di p, da cui si ricava $g(t)=\left(\frac{a}{t^s-b}\right)^{\frac{1}{n}}:]b^{\frac{1}{s}},+\infty[\to]0,+\infty[$.

Osserviamo che se $p \in \mathbb{N}$, allora la Formula del Binomio di Newton permette il calcolo degli integrali considerati anche con $n,m \in \mathbb{R}$.

§6.<u>*Integrale indefinito di funzioni complesse di variabile reale.*</u>

In questo paragrafo accenneremo brevemente all'integrale indefinito di funzioni $f : (a, b) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Il concetto di primitiva di una funzione siffatta può essere introdotto come fatto nel caso delle funzioni reali di variabile reale, cosicché possiamo definire l'integrale indefinito $\int f(x)\, dx$ come l'insieme di tutte le primitive $F : (a, b) \to \mathbb{C}$ di f. Operando sulla parte reale e sulla parte immaginaria di f possiamo dedurre che questo nuovo integrale indefinito gode di tutte le proprietà prima dimostrate per l'integrale indefinito delle funzioni reali di variabile reale.

Esempio 6.1. Vogliamo calcolare i seguenti integrali (dove $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ non sono entrambi nulli)

$$\int e^{\alpha x} x^n \cos \beta x\, dx\,, \int e^{\alpha x} x^n \sin \beta x\, dx, \qquad n \in \mathbb{N} \tag{6.1}$$

A tal fine consideriamo l'integrale seguente

$$\int x^n e^{(\alpha+i\beta)x}\, dx, \qquad n \in \mathbb{N},$$

che possiamo integrare per parti, ottenendo così la seguente *formula di ricorrenza*

$$\int x^n e^{(\alpha+i\beta)x}\, dx = x^n \frac{e^{(\alpha+i\beta)x}}{\alpha + i\beta} - \int n x^{n-1} \frac{e^{(\alpha+i\beta)x}}{\alpha + i\beta}\, dx \qquad n \in \mathbb{N};$$

isolando parte reale e parte immaginaria si ottengono delle *formule di ricorrenza* relative agli integrali (6.1)

$$\int e^{\alpha x} x^n \cos \beta x\, dx = x^n e^{\alpha x} \left(\frac{\alpha \cos \beta x + \beta \sin \beta x}{\alpha^2 + \beta^2} \right) - \int n x^{n-1} e^{\alpha x} \left(\frac{\alpha \cos \beta x + \beta \sin \beta x}{\alpha^2 + \beta^2} \right) dx \qquad n \in \mathbb{N}$$

$$\int e^{\alpha x} x^n \sin \beta x\, dx = x^n e^{\alpha x} \left(\frac{-\beta \cos \beta x + \alpha \sin \beta x}{\alpha^2 + \beta^2} \right) - \int n x^{n-1} e^{\alpha x} \left(\frac{-\beta \cos \beta x + \alpha \sin \beta x}{\alpha^2 + \beta^2} \right) dx \qquad n \in \mathbb{N}.$$

In particolare, per $n = 0$, otteniamo

$$\int e^{\alpha x} \cos \beta x\, dx = e^{\alpha x} \left(\frac{\alpha \cos \beta x + \beta \sin \beta x}{\alpha^2 + \beta^2} \right)$$

$$\int e^{\alpha x} \sin \beta x\, dx = e^{\alpha x} \left(\frac{-\beta \cos \beta x + \alpha \sin \beta x}{\alpha^2 + \beta^2} \right). \blacksquare$$