

## CAPITOLO 13

**INTEGRAZIONE SECONDO RIEMANN PER FUNZIONI REALI (COMPLESSE)  
DI UNA VARIABILE REALE**

§1. *L'integrale di Riemann.*

In questo capitolo ci occuperemo della teoria dell'integrazione secondo Riemann per le funzioni reali di una variabile reale.

Sia data una funzione  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  **limitata**. Consideriamo una decomposizione  $D$  di  $[a, b]$  in un numero **finito** di intervalli mediante i punti seguenti  $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_i < x_{i+1} < \dots < x_n = b$  e poniamo

$$M_i = \sup\{f(x) : x \in [x_i, x_{i+1}]\} \quad , \quad m_i = \inf\{f(x) : x \in [x_i, x_{i+1}]\}$$

(si osservi che tali inf e sup esistono perché  $f$  è limitata in  $[a, b]$  e quindi anche in ogni sottointervallo); calcoliamo, quindi, le seguenti somme

$$S_D^f = M_0(x_1 - x_0) + M_1(x_2 - x_1) + \dots + M_i(x_{i+1} - x_i) + \dots + M_{n-1}(x_n - x_{n-1}) = \sum_{i=0}^{n-1} M_i(x_{i+1} - x_i)$$

$$s_D^f = m_0(x_1 - x_0) + m_1(x_2 - x_1) + \dots + m_i(x_{i+1} - x_i) + \dots + m_{n-1}(x_n - x_{n-1}) = \sum_{i=0}^{n-1} m_i(x_{i+1} - x_i)$$

che chiameremo rispettivamente somma superiore e somma inferiore (d'ora in poi, quando non vi sarà possibilità di confusione, denoteremo ogni somma superiore con il simbolo  $S_D$  invece che con il simbolo  $S_D^f$  e ogni somma inferiore con il simbolo  $s_D$  invece che con il simbolo  $s_D^f$ ). Al variare della decomposizione  $D$  in tutti i modi possibili otteniamo che le somme superiori e le somme inferiori descrivono due insiemi numerici, che denoteremo con  $\Sigma = \{S_D\}$  e  $\sigma = \{s_D\}$ .

**Teorema 1.1.** *Date due arbitrarie decomposizioni  $D'$  e  $D''$  (che quindi possono coincidere oppure no) si ha sempre*

$$S_{D'} \geq s_{D''}$$

Dimostrazione. Osserviamo, intanto, che se le due decomposizioni coincidono è ovvio che  $S_{D'} \geq s_{D''}$ , poiché l'estremo superiore di una funzione in un insieme è maggiore od uguale dell'estremo inferiore della funzione nello stesso insieme e quindi ogni addendo di  $S_{D'}$  è maggiore od uguale del corrispondente addendo di  $s_{D''}$ . Supponiamo, allora, che le due decomposizioni considerate siano differenti ed in particolare che  $D''$  sia ottenuta dalla decomposizione  $D'$  aggiungendo un solo punto  $x^*$ , che, tanto per fissare le idee, supporremo compreso fra  $x_0$  ed  $x_1$ ; si ha allora

$$\begin{aligned} S_{D'} &= M_0(x_1 - x_0) + M_1(x_2 - x_1) + \dots + M_i(x_{i+1} - x_i) + \dots + M_{n-1}(x_n - x_{n-1}) = \\ &M_0[(x_1 - x^*) + (x^* - x_0)] + M_1(x_2 - x_1) + \dots + M_i(x_{i+1} - x_i) + \dots + M_{n-1}(x_n - x_{n-1}) \geq \\ &\sup\{f(x) : x \in [x_0, x^*]\}(x^* - x_0) + \sup\{f(x) : x \in [x^*, x_1]\}(x_1 - x^*) + M_1(x_2 - x_1) + \dots + \\ &M_i(x_{i+1} - x_i) + \dots + M_{n-1}(x_n - x_{n-1}) = S_{D''} \end{aligned}$$

avendo tenuto conto del ben noto fatto che l'estremo superiore di una funzione in un insieme è maggiore od uguale dell'estremo superiore della funzione in un qualunque sottoinsieme; in modo analogo, tenuto conto del ben noto fatto che l'estremo inferiore di una funzione in un insieme è minore od uguale dell'estremo inferiore della funzione in un qualunque sottoinsieme, si prova che

$$s_{D'} \leq s_{D''}$$

Adesso, supponiamo che  $D''$  sia ottenuta dalla decomposizione  $D'$  aggiungendo un numero finito di punti  $y_1, y_2, \dots, y_h$ ; consideriamo la decomposizione  $D_1$  che si ottiene dalla  $D'$  aggiungendo solo  $y_1$ , la decomposizione  $D_2$  che si ottiene dalla  $D_1$  aggiungendo solo  $y_2$ , la decomposizione  $D_3$  che si ottiene dalla  $D_2$  aggiungendo solo  $y_3$ , ..... , la decomposizione  $D_h$  (coincidente con la decomposizione  $D''$ ) che si ottiene dalla  $D_{h-1}$  aggiungendo solo  $y_h$ ; per quanto visto sopra otteniamo le seguenti catene di disuguaglianze, che utilizzeremo per provare la tesi nel caso generale

$$S_{D'} \geq S_{D_1} \geq S_{D_2} \geq \dots \geq S_{D''}$$

$$s_{D'} \leq s_{D_1} \leq s_{D_2} \leq \dots \leq s_{D''}$$

Passando al caso di due decomposizioni  $D'$  e  $D''$  del tutto arbitrarie, indichiamo con  $D$  la decomposizione ottenuta unendo  $D'$  e  $D''$ ; è chiaro che  $D$  si può pensare sia come decomposizione ottenuta da  $D'$  aggiungendo

un numero finito di punti, che come decomposizione ottenuta da  $D''$  aggiungendo un numero finito di punti; quindi per quanto già visto deve aversi

$$S_{D'} \geq S_D \geq s_D \geq s_{D''}$$

che è quanto volevamo provare. ■

Dal precedente risultato segue che gli insiemi  $\sigma$  e  $\Sigma$  sono separati (in particolare  $\Sigma$  è inferiormente limitato dalle somme inferiori, mentre l'insieme  $\sigma$  è superiormente limitato dalle somme superiori); quindi  $\inf \Sigma \in \mathbb{R}$ ,  $\sup \sigma \in \mathbb{R}$  ed inoltre, come sappiamo

$$\inf \Sigma \geq \sup \sigma \tag{1.1}$$

**Definizione 1.1.** Diremo che  $f$  è integrabile secondo Riemann (o semplicemente integrabile) se nella (1.1) vale il segno di uguaglianza; in questo caso, per definizione, porremo

$$\int_a^b f(x) dx = \inf \Sigma = \sup \sigma.$$

**Osservazione 1.1:** Dalla Definizione 1.1 deriva facilmente la seguente utile disuguaglianza

$$s_D \leq \int_a^b f(x) dx \leq S_D$$

valida per ogni decomposizione  $D$  di  $[a, b]$ . ■

Presentiamo subito due esempi, il primo di una funzione integrabile secondo Riemann e il secondo di una funzione non integrabile secondo Riemann:

**Esempio 1.1.** Sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = k$ , una funzione costante; data una decomposizione  $D$  di  $[a, b]$  come sopra, è ovvio che

$$M_i = \sup\{f(x) : x \in [x_i, x_{i+1}]\} = m_i = \inf\{f(x) : x \in [x_i, x_{i+1}]\} = k$$

per ogni  $i = 0, 1, 2, \dots, n - 1$ ; quindi ogni somma superiore vale  $k(b - a)$  così come ogni somma inferiore; allora gli insiemi  $\Sigma$  e  $\sigma$  sono costituiti dall'unico elemento  $k(b - a)$ . Ne viene che  $\inf \Sigma = \sup \sigma = k(b - a)$ ; ogni  $f$  costante risulta quindi integrabile secondo Riemann e si ha

$$\int_a^b f(x) dx = k(b - a). \blacksquare$$

**Esempio 1.2.** Sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \alpha$  se  $x \in \mathbb{Q} \cap [a, b]$ ,  $f(x) = \beta$  se  $x \notin \mathbb{Q} \cap [a, b]$ , con  $\alpha \neq \beta$  (funzione di Dirichlet). Per fissare le idee sia  $\alpha > \beta$ . Data una decomposizione  $D$  di  $[a, b]$  come sopra, si ha che

$$M_i = \sup\{f(x) : x \in [x_i, x_{i+1}]\} = \alpha, \quad m_i = \inf\{f(x) : x \in [x_i, x_{i+1}]\} = \beta$$

per ogni  $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$ , poiché ogni intervallo reale contiene sia numeri razionali che numeri irrazionali; quindi ogni somma superiore vale  $\alpha(b-a)$  mentre ogni somma inferiore vale  $\beta(b-a)$ ; allora  $\inf \Sigma = \alpha(b-a) \neq \beta(b-a) = \sup \sigma$ . Ne viene che la funzione  $f$  considerata non è integrabile secondo Riemann. ■

Un primo importante risultato relativo all'integrale di Riemann è il seguente

**Criterio di integrabilità di Riemann.** Sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione limitata. Condizione necessaria e sufficiente affinché  $f$  sia integrabile secondo Riemann è che per ogni  $\epsilon > 0$  esista una decomposizione  $D_\epsilon$  di  $[a, b]$  tale che  $S_{D_\epsilon} - s_{D_\epsilon} < \epsilon$ .

*Dimostrazione.* Proviamo prima la condizione necessaria. Per ipotesi  $f$  è integrabile secondo Riemann; questo significa che  $\inf \Sigma = \sup \sigma$ . Usiamo adesso sia la seconda proprietà dell'estremo inferiore che la seconda proprietà dell'estremo superiore; fissato  $\epsilon > 0$  esiste una decomposizione  $D_1$  tale che  $\inf \Sigma + \epsilon/2 > S_{D_1}$  ed esiste una decomposizione  $D_2$  tale che  $\sup \sigma - \epsilon/2 < s_{D_2}$ ; poiché, come già osservato, si ha  $\inf \Sigma = \sup \sigma$ , risulta

$$S_{D_1} - s_{D_2} \leq \inf \Sigma + \frac{\epsilon}{2} - \left( \sup \sigma - \frac{\epsilon}{2} \right) = \epsilon$$

Adesso consideriamo la decomposizione  $D_\epsilon$  che si ottiene unendo le decomposizioni  $D_1$  e  $D_2$ ; poiché, come già provato, risulta  $S_{D_1} \geq S_{D_\epsilon} \geq s_{D_\epsilon} \geq s_{D_2}$  otteniamo facilmente che

$$S_{D_\epsilon} - s_{D_\epsilon} \leq S_{D_1} - s_{D_2} < \epsilon$$

in questo modo concludendo la dimostrazione della parte necessaria della condizione di Riemann. Passiamo adesso alla dimostrazione della sufficienza. Per ipotesi, fissato  $\epsilon > 0$  esiste una decomposizione  $D_\epsilon$  tale che  $S_{D_\epsilon} - s_{D_\epsilon} < \epsilon$ ; dalla prima proprietà dell'estremo inferiore e dalla prima proprietà dell'estremo superiore segue allora che  $\inf \Sigma - \sup \sigma \leq S_{D_\epsilon} - s_{D_\epsilon}$  e quindi che

$$0 \leq \inf \Sigma - \sup \sigma < \epsilon \quad \forall \epsilon > 0.$$

Dall'arbitrarietà di  $\epsilon$  segue allora che

$$\inf \Sigma = \sup \sigma$$

cioé l'integrabilità di  $f$ . La parte sufficiente è così provata e la dimostrazione del teorema è quindi conclusa. ■

**Esercizio 1.1.** Sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  integrabile secondo Riemann e sia  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione tale che  $f(x) = g(x)$  per ogni  $x \in [a, b]$ , tranne un numero finito di punti di  $[a, b]$ ; dimostrare che anche  $g$  è integrabile secondo Riemann e che il valore dell'integrale di  $g$  coincide con quello dell'integrale di  $f$ . ■

Il precedente criterio è di fondamentale importanza perché permette, innanzitutto, di determinare alcune ampie classi di funzioni integrabili secondo Riemann; ma esso sarà anche usato nella dimostrazione di altri importanti risultati relativi all'integrazione.

**Integrabilità di Funzioni Continue.** Sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua. Allora  $f$  è integrabile.

Dimostrazione. Per il Teorema di Cantor  $f$  risulta uniformemente continua in  $[a, b]$ ; quindi, fissato  $\epsilon > 0$  esiste  $\delta > 0$  tale che per ogni  $x, y \in [a, b]$  con  $|x - y| < \delta$  risulta  $|f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{b-a}$ . Scegliamo adesso una decomposizione  $D$  di  $[a, b]$  in intervalli parziali tutti di lunghezza minore di  $\delta$  e cerchiamo di valutare la differenza seguente

$$S_D - s_D = (M_0 - m_0)(x_1 - x_0) + (M_1 - m_1)(x_2 - x_1) + \dots + (M_i - m_i)(x_{i+1} - x_i) + \dots + (M_{n-1} - m_{n-1})(x_n - x_{n-1})$$

Osserviamo che essendo  $f$  continua ogni  $M_i$  (risp. ogni  $m_i$ ) è in effetti un massimo (risp. un minimo) per  $f$  nell'intervallo  $[x_i, x_{i+1}]$ ; esisteranno allora punti  $z_i, t_i \in [x_i, x_{i+1}]$  tali che  $M_i = f(z_i), m_i = f(t_i)$ ; ovviamente  $|z_i - t_i| \leq x_{i+1} - x_i < \delta$  da cui, per l'uniforme continuità, segue

$$|M_i - m_i| = |f(z_i) - f(t_i)| < \frac{\epsilon}{b-a} \quad \forall i = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

Ne viene allora che

$$\begin{aligned} S_D - s_D &= (M_0 - m_0)(x_1 - x_0) + (M_1 - m_1)(x_2 - x_1) + \dots + (M_i - m_i)(x_{i+1} - x_i) + \dots \\ &\quad \dots + (M_{n-1} - m_{n-1})(x_n - x_{n-1}) < \\ &\quad \frac{\epsilon}{b-a}(x_1 - x_0) + \frac{\epsilon}{b-a}(x_2 - x_1) + \dots + \frac{\epsilon}{b-a}(x_{i+1} - x_i) + \dots \\ &\quad \dots + \frac{\epsilon}{b-a}(x_n - x_{n-1}) = \\ &\quad \frac{\epsilon}{b-a}[(x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + \dots + (x_{i+1} - x_i) + \dots + (x_n - x_{n-1})] = \\ &\quad \frac{\epsilon}{b-a}(b - a) = \epsilon \end{aligned}$$

Il criterio di integrabilità di Riemann permette di affermare che  $f$  è integrabile. ■

**Esempio 1.3.** Dimostriamo che  $\int_a^b x \, dx = \frac{b^2 - a^2}{2}$ , per ogni  $[a, b] \subset \mathbb{R}$ . Innanzitutto osserviamo che la funzione

integranda è continua e quindi integrabile per il precedente risultato; occorre, allora, solo trovare l'elemento di separazione degli insiemi delle somme superiori e delle somme inferiori. Sia  $D$  la seguente decomposizione di  $[a, b]$

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_i < x_{i+1} < \dots < x_{n+1} = b;$$

si ha

$$S_D = \sum_{i=0}^n (x_{i+1} - x_i) x_{i+1}, \quad s_D = \sum_{i=0}^n (x_{i+1} - x_i) x_i;$$

notiamo, adesso, che  $x_i < \frac{x_i + x_{i+1}}{2} < x_{i+1}$ , per ogni  $i = 0, 1, \dots, n$ ; ne segue che

$$S_D = \sum_{i=0}^n (x_{i+1} - x_i) x_{i+1} > \sum_{i=0}^n (x_{i+1} - x_i) \frac{x_i + x_{i+1}}{2} > \sum_{i=0}^n (x_{i+1} - x_i) x_i = s_D \quad \forall D \text{ decomposizione;}$$

poiché

$$\sum_{i=0}^n (x_{i+1} - x_i) \frac{x_i + x_{i+1}}{2} = \sum_{i=0}^n \frac{x_{i+1}^2 - x_i^2}{2} = \frac{b^2 - a^2}{2}$$

si ha la tesi. ■

**Esempio 1.4.** Dimostriamo che  $\int_a^b \cos x \, dx = \sin b - \sin a$ , per ogni  $[a, b] \subset \mathbb{R}$ . Innanzitutto osserviamo che la funzione integranda è continua e quindi integrabile per il precedente risultato; occorre, allora, solo trovare l'elemento di separazione degli insiemi delle somme superiori e delle somme inferiori. Sia  $D$  la seguente decomposizione di  $[a, b]$

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_i < x_{i+1} < \dots < x_{n+1} = b;$$

si ha

$$S_D = \sum_{i=0}^n (x_{i+1} - x_i) \sup_{x \in [x_i, x_{i+1}]} \cos x, \quad s_D = \sum_{i=0}^n (x_{i+1} - x_i) \inf_{x \in [x_i, x_{i+1}]} \cos x;$$

notiamo, adesso, che in ogni intervallo  $[x_i, x_{i+1}]$  è possibile applicare il Teorema di Lagrange alla funzione  $\sin x$ ; per un punto opportuno  $y_i \in ]x_i, x_{i+1}[$  si ha  $(x_{i+1} - x_i) \cos y_i = \sin x_{i+1} - \sin x_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ ; si ha

$$S_D = \sum_{i=0}^n (x_{i+1} - x_i) \sup_{x \in [x_i, x_{i+1}]} \cos x \geq \sum_{i=0}^n (x_{i+1} - x_i) \cos y_i \geq \sum_{i=0}^n (x_{i+1} - x_i) \inf_{x \in [x_i, x_{i+1}]} \cos x = s_D$$

e quindi

$$S_D = \sum_{i=0}^n (x_{i+1} - x_i) \sup_{x \in [x_i, x_{i+1}]} \cos x \geq \sum_{i=0}^n (\sin x_{i+1} - \sin x_i) = \sin b - \sin a \geq$$

$$\sum_{i=0}^n (x_{i+1} - x_i) \inf_{x \in [x_i, x_{i+1}]} \cos x = s_D \quad \forall D \text{ decomposizione;}$$

l'elemento di separazione cercato, cioè il valore dell'integrale da calcolare, è quindi  $\sin b - \sin a$ . ■

**Esercizio 1.2.** Provare che  $\int_a^b \frac{1}{x} dx = \log b - \log a$ , per ogni  $[a, b] \subset ]0, +\infty[$ . ■

**Esercizio 1.3.** Provare che  $\int_a^b 3x^2 dx = b^3 - a^3$ , per ogni  $[a, b] \subset \mathbb{R}$ . ■

**Osservazione 1.2.** Nel precedente Teorema abbiamo considerato una differenza del tipo seguente

$$S_D - s_D = (M_0 - m_0)(x_1 - x_0) + (M_1 - m_1)(x_2 - x_1) + \dots + \\ (M_i - m_i)(x_{i+1} - x_i) + \dots + (M_{n-1} - m_{n-1})(x_n - x_{n-1}) \quad (1.2)$$

ed essa sarà ancora considerata nel seguito. È molto importante osservare, una volta per tutte, che la differenza (1.2) è non negativa perché somma di quantità non negative del tipo  $(M_i - m_i)(x_{i+1} - x_i)$ ; infatti  $x_i < x_{i+1}$  e  $M_i = \sup\{f(x) : x \in [x_i, x_{i+1}]\} \geq m_i = \inf\{f(x) : x \in [x_i, x_{i+1}]\}$ . ■

**Teorema 1.2.** Sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  limitata e siano  $y_0 = a < y_1 < \dots < y_i < \dots < y_k = b$  un numero finito di punti di  $[a, b]$  tali che  $f$  risulti integrabile se ristretta ad ognuno degli intervalli  $[y_i, y_{i+1}]$ ,  $i = 0, 1, \dots, k-1$ . Allora  $f$  risulta integrabile in  $[a, b]$ .

Dimostrazione. Fissiamo  $\epsilon > 0$  e scegliamo una decomposizione  $D_i$  di  $[y_i, y_{i+1}]$ , per ogni  $i = 0, 1, \dots, k-1$ , tale che  $S_{D_i} - s_{D_i} < \epsilon/k$ . Denotiamo con  $D$  la decomposizione di  $[a, b]$  ottenuta considerando tutti i punti delle decomposizioni  $D_i$ . È facile vedere che, grazie alla (1.2) ed alla definizione di  $D$ , risulta

$$S_D - s_D = \sum_{i=0}^{k-1} [S_{D_i} - s_{D_i}] < \sum_{i=0}^{k-1} \frac{\epsilon}{k} = \epsilon$$

Il Criterio di Riemann permette di concludere che  $f$  è integrabile in  $[a, b]$ . ■

**Definizione 1.2.** Una funzione  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  che ha un numero finito di punti di discontinuità nel proprio dominio sarà detta *generalmente continua*.

Proviamo il teorema seguente

**Integrabilità di Funzioni Generalmente Continue e Limitate.** Sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione generalmente continua e limitata. Allora  $f$  è integrabile secondo Riemann

Dimostrazione. Siano  $z_1, z_2, \dots, z_h$  i punti di discontinuità di  $f$  in  $[a, b]$ ; tale intervallo può essere diviso in un numero finito di intervalli  $I_j$  contenenti uno solo dei punti di discontinuità di  $f$ ; se si riuscisse a provare la integrabilità di  $f$  in ognuno di essi, il Teorema 2 permetterebbe di concludere che  $f$  è integrabile in tutto

$[a, b]$ . Questo significa che è possibile considerare il caso in cui  $f$  ha un unico punto  $z$  di discontinuità in  $[a, b]$ . Fissiamo  $\epsilon > 0$  e supponiamo, tanto per fissare le idee, che  $z \in ]a, b[$ , potendosi procedere in maniera analoga se  $z = a$  oppure  $z = b$ . Sia  $M = \sup\{f(x) : x \in [a, b]\} - \inf\{f(x) : x \in [a, b]\}$ ; osserviamo che  $M > 0$ , altrimenti  $f$  sarebbe costante e quindi continua. Scegliamo un numero positivo  $\delta$  tale che  $\delta < \frac{\epsilon}{6M}$  e che  $a < z - \delta, z + \delta < b$ . Consideriamo adesso gli intervalli  $[a, z - \delta]$  e  $[z + \delta, b]$  nei quali  $f$  è continua e quindi integrabile per il Teorema di Integrabilità delle Funzioni Continue, una decomposizione  $D_1$  dell'intervallo  $[a, z - \delta]$  mediante i punti  $x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = z - \delta$  (e denotiamo con  $H_i$  ed  $h_i$  rispettivamente il sup e l'inf di  $f$  nel generico intervallo  $[x_i, x_{i+1}]$ ) e una decomposizione  $D_2$  dell'intervallo  $[z + \delta, b]$  mediante i punti  $y_0 = z + \delta < y_1 < \dots < y_p = b$  (e denotiamo con  $K_i$  ed  $k_i$  rispettivamente il sup e l'inf di  $f$  nel generico intervallo  $[y_i, y_{i+1}]$ ), tali che

$$S_{D_1} - s_{D_1} < \frac{\epsilon}{3}, \quad S_{D_2} - s_{D_2} < \frac{\epsilon}{3}$$

Sia  $D$  la decomposizione di  $[a, b]$  ottenuta unendo i punti di  $D_1$  e  $D_2$ ; si ha così

$$\begin{aligned} S_D - s_D &= (H_0 - h_0)(x_1 - x_0) + \dots + (H_{n-1} - h_{n-1})(x_n - x_{n-1}) + \\ &\quad (\sup\{f(x) : x \in [z - \delta, z + \delta]\} - \inf\{f(x) : x \in [z - \delta, z + \delta]\})2\delta + \\ &\quad (K_0 - k_0)(y_1 - y_0) + \dots + (K_{p-1} - k_{p-1})(y_p - y_{p-1}) = \\ S_{D_1} - s_{D_1} &+ (\sup\{f(x) : x \in [z - \delta, z + \delta]\} - \inf\{f(x) : x \in [z - \delta, z + \delta]\})2\delta + \\ S_{D_2} - s_{D_2} &< \frac{\epsilon}{3} + (\sup\{f(x) : x \in [a, b]\} - \inf\{f(x) : x \in [a, b]\})2\delta + \frac{\epsilon}{3} = \\ &\frac{\epsilon}{3} + M2\delta + \frac{\epsilon}{3} < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon \end{aligned}$$

Il solito Criterio di Riemann permette di concludere che  $f$  è integrabile in  $[a, b]$ . ■

Infine dimostriamo il teorema seguente, che ci permette di individuare una terza famiglia di funzioni integrabili secondo Riemann

**Integrabilità delle Funzioni Monotone.** *Sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione monotona. Allora  $f$  è integrabile secondo Riemann.*

*Dimostrazione.* Osserviamo intanto che la monotonia di  $f$  implica la sua limitatezza, grazie al fatto che  $[a, b]$  è chiuso e limitato; ha quindi senso porsi il problema dell'integrabilità di una tale  $f$ . Per fissare le idee supponiamo che  $f$  sia non decrescente (e non costante, caso già trattato); ne segue che  $f(a) < f(b)$ . Scelto  $\epsilon > 0$ , consideriamo una decomposizione  $D$  di  $[a, b]$  in intervalli parziali tutti di lunghezza minore di  $\frac{\epsilon}{f(b) - f(a)}$

e cerchiamo di valutare la differenza  $S_D - s_D = \sum_{i=1}^{n-1} (M_i - m_i)(x_{i+1} - x_i)$ ; innanzitutto osserviamo che  $f$  è non decrescente e quindi si ha  $M_i = f(x_{i+1}), m_i = f(x_i)$ , in ogni intervallo  $[x_i, x_{i+1}]$ ; ne deriva che

$$\begin{aligned} S_D - s_D &= (M_0 - m_0)(x_1 - x_0) + (M_1 - m_1)(x_2 - x_1) + \dots + (M_i - m_i)(x_{i+1} - x_i) + \\ &\dots + (M_{n-1} - m_{n-1})(x_n - x_{n-1}) = (f(x_1) - f(x_0))(x_1 - x_0) + (f(x_2) - f(x_1))(x_2 - x_1) + \dots + \\ &\quad (f(x_{i+1}) - f(x_i))(x_{i+1} - x_i) + \dots + (f(x_n) - f(x_{n-1}))(x_n - x_{n-1}) < \\ &\quad \frac{\epsilon}{f(b) - f(a)} [(f(x_1) - f(x_0)) + (f(x_2) - f(x_1)) + \dots + (f(x_{i+1}) - f(x_i)) + \dots + \\ &\quad (f(x_n) - f(x_{n-1}))] = \frac{\epsilon}{f(b) - f(a)} (f(b) - f(a)) = \epsilon \end{aligned}$$

Il criterio di Riemann permette di affermare che  $f$  è integrabile. ■

Le tre classi di funzioni considerate in precedenza non esauriscono la totalità della famiglia delle funzioni integrabili secondo Riemann; la seguente *funzione di Lebesgue* non appartiene ad alcuna delle tre classi di funzioni considerate sopra ed è integrabile secondo Riemann; sia  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  la funzione definita ponendo

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q} \\ 0 & x = 0 \\ \frac{1}{n} & x = \frac{m}{n}, M.C.D.(m, n) = 1 \end{cases}$$

Tale funzione è discontinua in ogni  $x \in ]0, 1[ \cap \mathbb{R}$ ; infatti in un tale  $x$ , per definizione,  $f$  assume un valore positivo; se fosse continua in questo punto dovrebbe esistere un suo intorno dove  $f$  è ancora positiva; ma in un intorno siffatto esistono infiniti numeri irrazionali, dove  $f$  vale zero, cosicché abbiamo dimostrato quanto volevamo; quindi  $f$  non è continua, nè è generalmente continua, perché i suoi punti di discontinuità sono infiniti; nè è monotona, perché in ogni sottointervallo di  $[0, 1]$  vi sono sia punti dove  $f$  vale zero sia punti dove  $f$  è positiva. Tuttavia  $f$  è limitata ed ha quindi senso porsi il problema della sua integrabilità secondo Riemann, come adesso faremo provando che  $f$  è in effetti integrabile. Osserviamo intanto che una qualunque somma inferiore relativa ad una qualunque decomposizione vale 0; quindi, per provare l'integrabilità, è sufficiente provare che per ogni  $\epsilon > 0$  esiste una decomposizione  $D_\epsilon$  tale che  $S_{D_\epsilon} < \epsilon$ ; in tal modo avremo che  $\inf \Sigma = 0$ , da cui l'integrabilità a norma di definizione. In corrispondenza ad  $\epsilon > 0$ , che sceglieremo anche minore di 1, esiste  $n^* \in \mathbb{N}$  tale che  $\frac{1}{n} \geq \frac{\epsilon}{2}$  solo per  $n = 1, 2, \dots, n^*$ ; poiché, per ogni  $h \in \mathbb{N}, h \geq 1$ ,  $f$  assume il valore  $\frac{1}{h}$  in un numero finito di punti (la dimostrazione viene lasciata al lettore), possiamo affermare che esistono solo un numero finito di punti,  $y_1, y_2, \dots, y_{n_0}, n_0 \geq n^*$  (fra i quali  $x = 1$ , ma non  $x = 0$ ), in cui  $f$  è maggiore

od uguale ad  $\frac{\epsilon}{2}$ ; possiamo anche supporre di averli già ordinati in ordine crescente (ne segue che  $y_{n_0} = 1$ ). Scegliamo adesso la seguente decomposizione di  $[0, 1]$ :  $x_0 = 0 < x_1 < z_1 < x_2 < z_2 < \dots < x_{n_0} < z_{n_0} = 1$  in modo che si abbia

$$x_i < y_i < z_i \quad , \quad |z_i - x_i| < \frac{\epsilon}{2n_0} \quad \forall i = 1, 2, \dots, n_0 - 1,$$

ed osserviamo che in ognuno degli  $n_0$  intervalli del tipo  $[x_i, z_i]$  cade il punto  $y_i$  dove  $f$  è maggiore od uguale a  $\frac{\epsilon}{2}$ , ma non supera 1, mentre nei restanti intervalli  $f$  è minore di  $\frac{\epsilon}{2}$ ; per la corrispondente somma superiore avremo così

$$\begin{aligned} S_{D_\epsilon} &= \sup\{f(x) : x \in [0, x_1]\}(x_1 - 0) + \sup\{f(x) : x \in [x_1, z_1]\}(z_1 - x_1) + \\ &\sup\{f(x) : x \in [z_1, x_2]\}(x_2 - z_2) + \dots + \sup\{f(x) : x \in [x_{n_0}, 1]\}(1 - x_{n_0}) < \\ &\frac{\epsilon}{2}(x_1 - 0) + (z_1 - x_1) + \frac{\epsilon}{2}(x_2 - z_1) + (z_2 - x_2) + \dots + \frac{\epsilon}{2}(x_{n_0} - z_{n_0-1}) + (1 - x_{n_0}) \leq \\ &\frac{\epsilon}{2}[(x_1 - 0) + (x_2 - z_1) + \dots + (x_{n_0} - z_{n_0-1})] + \left[ \frac{\epsilon}{2n_0} + \frac{\epsilon}{2n_0} + \dots + \frac{\epsilon}{2n_0} \right] \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2n_0}n_0 = \epsilon. \end{aligned}$$

La integrabilità di  $f$  è così acquisita. Prima di concludere lo studio della funzione di Lebesgue, osserviamo che il suo integrale di Riemann vale zero, anche se essa assume valori positivi in una infinità numerabile di punti del proprio dominio. Il perché di tale "strano" comportamento sarà chiaro quando verrà studiata la teoria della integrazione secondo Lebesgue.■

**Esercizio 1.4.** Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione periodica di periodo  $T > 0$ , che risulti integrabile secondo Riemann in un intervallo di ampiezza  $T$ ; provare che  $f$  è integrabile in ogni sottointervallo chiuso e limitato di  $\mathbb{R}$  e che si ha  $\int_a^b f(x) dx = \int_{a+T}^{b+T} f(x) dx$  per ogni  $[a, b] \subset \mathbb{R}$ .■

## §2. Proprietà dell'integrale di Riemann.

Sempre dal Criterio di Riemann discende il seguente importante risultato

**Teorema 2.1.** *Sia  $f$  una funzione reale limitata ed integrabile in un intervallo  $[a, b]$  e siano  $y_1, y_2 \in [a, b]$  con  $y_1 < y_2$ . Allora  $f$  è integrabile in  $[y_1, y_2]$ .*

Dimostrazione. Essendo  $f$  integrabile, fissato  $\epsilon > 0$  esiste una decomposizione  $D$  di  $[a, b]$  mediante certi punti  $x_0 = a < x_1 < \dots < x_i < x_{i+1} < \dots < x_n = b$  tale che  $S_D - s_D < \epsilon$ ; se aggiungiamo a  $D$  i

due punti  $y_1, y_2$  otteniamo una decomposizione  $D_1$  (che potrebbe anche coincidere con  $D$ ) per cui vale che  $S_D \geq S_{D_1}, s_D \leq s_{D_1}$ , come visto nella dimostrazione del Teorema 1.1; quindi si ha  $S_{D_1} - s_{D_1} < \epsilon$ . Adesso consideriamo i punti di  $D_1$  che cadono nell'intervallo  $[y_1, y_2]$  e che quindi costituiscono una decomposizione  $D^*$  di tale intervallo. Osserviamo che, per la scelta di  $D^*$  e per l'Osservazione 1.2, si ha allora

$$S_{D^*} - s_{D^*} \leq S_{D_1} - s_{D_1} < \epsilon$$

che grazie al criterio di Riemann conclude la dimostrazione. ■

L'integrale di Riemann gode delle seguenti proprietà

i) *Omogeneità*: Sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  integrabile e sia  $c \in \mathbb{R}$ ; allora la funzione  $cf$  è integrabile secondo Riemann in  $[a, b]$  e si ha

$$\int_a^b cf(x)dx = c \int_a^b f(x)dx \quad (2.1)$$

Dimostrazione. Se  $c = 0$ , è ovvio che  $cf$  è integrabile, perché costante; inoltre, anche l'uguaglianza (2.1) è banalmente verificata. Sia quindi  $c \neq 0$ ; proviamo la integrabilità di  $cf$  e la validità della (2.1) nel caso di  $c > 0$ . Dall'integrabilità di  $f$  segue che, fissato  $\epsilon > 0$ , esiste una decomposizione  $D$  di  $[a, b]$  in un numero finito di intervalli mediante i punti seguenti  $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_i < x_{i+1} < \dots < x_n = b$  e tale che  $S_D^f - s_D^f < \epsilon/c$ ; poiché  $c > 0$ , si ha facilmente  $c \sup\{f(x) : x \in [x_i, x_{i+1}]\} = \sup\{cf(x) : x \in [x_i, x_{i+1}]\}$  e  $c \inf\{f(x) : x \in [x_i, x_{i+1}]\} = \inf\{cf(x) : x \in [x_i, x_{i+1}]\}$ ; ne viene così che

$$\begin{aligned} S_D^{cf} - s_D^{cf} &= \sum_{i=0}^{n-1} (\sup\{cf(x) : x \in [x_i, x_{i+1}]\} - \inf\{cf(x) : x \in [x_i, x_{i+1}]\})(x_{i+1} - x_i) = \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} (c \sup\{f(x) : x \in [x_i, x_{i+1}]\} - c \inf\{f(x) : x \in [x_i, x_{i+1}]\})(x_{i+1} - x_i) = \\ &= c \left[ \sum_{i=0}^{n-1} (\sup\{f(x) : x \in [x_i, x_{i+1}]\} - \inf\{f(x) : x \in [x_i, x_{i+1}]\})(x_{i+1} - x_i) \right] = c(S_D^f - s_D^f) < \epsilon \end{aligned}$$

quindi  $cf$  è integrabile in  $[a, b]$ . Notiamo che, se  $c > 0$ , si ha  $S_D^{cf} = cS_D^f$  e  $s_D^{cf} = cs_D^f$  per quanto osservato prima. Proviamo la (2.1): a tal fine, fissato  $\epsilon > 0$  scegliamo una decomposizione  $D$  tale che  $S_D^{cf} - s_D^{cf} < \epsilon$ ; dalla Osservazione 1.1 segue che

$$\begin{aligned} \int_a^b cf(x)dx - c \int_a^b f(x)dx &\leq S_D^{cf} - cs_D^f = S_D^{cf} - s_D^{cf} < \epsilon \\ c \int_a^b f(x)dx - \int_a^b cf(x)dx &\leq cS_D^f - s_D^{cf} = S_D^{cf} - s_D^{cf} < \epsilon \end{aligned}$$

Per la definizione di valore assoluto possiamo allora affermare che

$$\left| \int_a^b cf(x)dx - c \int_a^b f(x)dx \right| < \epsilon$$

Dall'arbitrarietà di  $\epsilon$  segue la (2.1).

Nel caso  $c < 0$ , la precedente dimostrazione continua a valere (con le opportune modifiche) scegliendo  $\epsilon/(-c)$  invece di  $\epsilon/c$  e tenendo presente che  $c \sup\{f(x) : x \in [x_i, x_{i+1}]\} = \inf\{cf(x) : x \in [x_i, x_{i+1}]\}$  e  $c \inf\{f(x) : x \in [x_i, x_{i+1}]\} = \sup\{cf(x) : x \in [x_i, x_{i+1}]\}$ . Ne viene che qualunque sia  $c \in \mathbb{R}$ , la funzione  $cf$  è integrabile e vale la (2.1).■

ii) *Distributività:* Siano  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  due funzioni integrabili; allora la funzione  $f + g$  è integrabile e risulta

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx \quad (2.2)$$

Dimostrazione. Sia  $\epsilon > 0$ ,  $D_1$  una decomposizione di  $[a, b]$  tale che  $S_{D_1}^f - s_{D_1}^f < \frac{\epsilon}{2}$ ,  $D_2$  una decomposizione di  $[a, b]$  tale che  $S_{D_2}^g - s_{D_2}^g < \frac{\epsilon}{2}$ ; consideriamo poi la decomposizione  $D$  che si ottiene unendo  $D_1$  e  $D_2$  e ricordiamo che, come provato durante la definizione di integrale di Riemann, si ha

$$S_D^f \leq S_{D_1}^f, S_D^g \leq S_{D_2}^g$$

$$s_D^f \geq s_{D_1}^f, s_D^g \geq s_{D_2}^g$$

ne segue che

$$S_D^f - s_D^f < \frac{\epsilon}{2}, S_D^g - s_D^g < \frac{\epsilon}{2}$$

Poiché è facile vedere che  $S_D^{f+g} \leq S_D^f + S_D^g$  ed anche  $s_D^{f+g} \geq s_D^f + s_D^g$ , otteniamo che

$$S_D^{f+g} - s_D^{f+g} \leq (S_D^f + S_D^g) - (s_D^f + s_D^g) < \epsilon$$

Abbiamo così la integrabilità di  $f+g$ . Proviamo la (2.2): a tal fine, fissato  $\epsilon > 0$  scegliamo una decomposizione  $D$  come sopra tale che  $S_D^f - s_D^f < \frac{\epsilon}{2}$  ed anche  $S_D^g - s_D^g < \frac{\epsilon}{2}$ ; dalla Osservazione 1.1 segue che

$$\begin{aligned} \int_a^b [f(x) + g(x)]dx - \left( \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx \right) &\leq \\ S_D^{f+g} - (s_D^f + s_D^g) &\leq S_D^f - s_D^f + S_D^g - s_D^g < \epsilon \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left( \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx \right) - \int_a^b [f(x) + g(x)]dx &\leq \\ (S_D^f + S_D^g) - s_D^{f+g} &\leq S_D^f - s_D^f + S_D^g - s_D^g < \epsilon \end{aligned}$$

Per la definizione di valore assoluto si ha allora

$$\left| \int_a^b [f(x) + g(x)] dx - \left( \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx \right) \right| < \epsilon$$

Dall'arbitrarietà di  $\epsilon$  segue la (2.2). ■

iii) *Additività*: Sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  integrabile e sia  $c \in ]a, b[$ . Allora,  $f$  è integrabile in  $[a, c]$  e in  $[c, b]$  e si ha

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \quad (2.3)$$

Dimostrazione. La integrabilità di  $f$  in  $[a, c]$  e in  $[c, b]$  segue dal Teorema 2.1; rimane solo da provare la (2.3). Fissiamo  $\epsilon > 0$  e scegliamo una decomposizione  $D_1$  di  $[a, c]$  e una decomposizione  $D_2$  di  $[c, b]$  tali che  $S_{D_1} - s_{D_1} < \frac{\epsilon}{2}$ ,  $S_{D_2} - s_{D_2} < \frac{\epsilon}{2}$ . Le due decomposizioni  $D_1$  e  $D_2$  danno luogo ad una decomposizione  $D$  di  $[a, b]$  per la quale è facile provare che  $S_D = S_{D_1} + S_{D_2}$ ,  $s_D = s_{D_1} + s_{D_2}$ ; l'Osservazione 1.1 implica che

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx - \left( \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \right) &\leq \\ S_D - (s_{D_1} + s_{D_2}) = S_{D_1} + S_{D_2} - (s_{D_1} + s_{D_2}) &< \epsilon \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left( \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \right) - \int_a^b f(x) dx &\leq \\ S_{D_1} + S_{D_2} - s_D = S_{D_1} + S_{D_2} - (s_{D_1} + s_{D_2}) &< \epsilon \end{aligned}$$

La definizione di valore assoluto permette di concludere che

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \left( \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \right) \right| \leq \epsilon$$

L'arbitrarietà di  $\epsilon$  prova la (2.3). ■

iv) *Positività*: Sia  $f : [a, b] \rightarrow [0, +\infty[$  integrabile. Allora

$$\int_a^b f(x) dx \geq 0 \quad (2.4).$$

Se inoltre  $f$  è continua, allora

$$\int_a^b f(x) dx = 0 \iff f(x) = 0 \quad \forall x \in [a, b]$$

Dimostrazione. Dall'Osservazione 1.1 segue subito la (2.4) se scegliamo la decomposizione  $D$  determinata dai soli punti  $x_0 = a < x_1 = b$  e se teniamo conto del fatto che  $\inf\{f(x) : x \in [a, b]\} \geq 0$ . Per quanto

riguarda la seconda affermazione, supponiamo che  $f$  sia continua; sappiamo già che se  $f$  è identicamente nulla, allora il suo integrale di Riemann vale 0. Viceversa, sia  $\int_a^b f(x)dx = 0$  e, per assurdo, supponiamo che esista  $y_0 \in [a, b]$  tale che  $f(y_0) > 0$ ; allora, grazie al Teorema della Permanenza del Segno ed alla continuità di  $f$  possiamo affermare che esiste un sottointervallo  $[c, d]$  di  $]a, b[$  dove  $f$  è positiva e quindi, per il Teorema di Weierstrass, ammette minimo positivo. Consideriamo la decomposizione  $D$  di  $[a, b]$  ottenuta scegliendo i punti  $a = x_0 < x_1 = c < x_2 = d < x_3 = b$  e, ricordando l'Osservazione 1.1, notiamo che

$$0 < \min\{f(x) : x \in [c, d]\}(d - c) \leq s_D \leq \int_a^b f(x)dx$$

contro la nostra ipotesi. Questa contraddizione dimostra che  $f$  deve essere identicamente nulla in  $[a, b]$ . ■

v) *Monotonia rispetto alla funzione integranda:* Siano  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  due funzioni integrabili con  $f(x) \leq g(x)$  per ogni  $x \in [a, b]$ ; allora si ha

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx \tag{2.5}$$

Dimostrazione. La funzione  $h = g - f$  è integrabile in  $[a, b]$  per la omogeneità e la distributività ed è non negativa per l'ipotesi fatta su  $f$  e  $g$ ; quindi, grazie a (2.1), (2.2) e (2.4) si ha

$$0 \leq \int_a^b h(x)dx = \int_a^b g(x)dx - \int_a^b f(x)dx$$

che prova la (2.5). ■

vi) Sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  integrabile e sia  $\phi : [\inf f, \sup f] \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione lipschitziana, con costante di lipschitzianità  $M$ . Allora  $\phi \circ f$  risulta integrabile in  $[a, b]$ .

Alla dimostrazione di questo risultato occorre premettere il seguente

**Lemma 2.2.** Sia  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  limitata e sia  $\phi : [\inf f, \sup f] \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione lipschitziana, con costante di lipschitzianità  $M$ . Allora

$$\sup_{x \in X} (\phi \circ f)(x) - \inf_{x \in X} (\phi \circ f)(x) \leq M \left[ \sup_{x \in X} f(x) - \inf_{x \in X} f(x) \right].$$

Infatti, fissato  $\epsilon > 0$ , applicando la seconda proprietà dell'estremo inferiore e la seconda proprietà dell'estremo superiore, troviamo  $x_\epsilon, y_\epsilon \in X$  tali che  $\sup_{x \in X} (\phi \circ f)(x) \leq (\phi \circ f)(x_\epsilon) + \epsilon/2$  e  $\inf_{x \in X} (\phi \circ f)(x) \geq (\phi \circ f)(y_\epsilon) - \epsilon/2$ ; ne segue che

$$\begin{aligned} \sup_{x \in X} (\phi \circ f)(x) - \inf_{x \in X} (\phi \circ f)(x) &\leq (\phi \circ f)(x_\epsilon) + \frac{\epsilon}{2} - \left( (\phi \circ f)(y_\epsilon) - \frac{\epsilon}{2} \right) \leq \\ |(\phi \circ f)(x_\epsilon) - (\phi \circ f)(y_\epsilon)| + \epsilon &\leq M|f(x_\epsilon) - f(y_\epsilon)| + \epsilon \leq M \left( \sup_{x \in X} f(x) - \inf_{x \in X} f(x) \right) + \epsilon \end{aligned}$$

che dà la tesi, stante l'arbitrarietà di  $\epsilon$ .■

Dimostriamo adesso la proprietà (vi); è intanto facile provare (la dimostrazione viene lasciata al lettore) che  $\phi \circ f$  è limitata; sia, ora,  $\epsilon > 0$  e sia  $D_\epsilon$  una decomposizione di  $[a, b]$  tale che  $S_{D_\epsilon}^f - s_{D_\epsilon}^f < \epsilon/M$  (tale decomposizione esiste perché  $f$  è integrabile); in corrispondenza alla stessa decomposizione calcoliamo

$$\begin{aligned} S_{D_\epsilon}^{\phi \circ f} - s_{D_\epsilon}^{\phi \circ f} &= \sum_{i=0}^{n-1} \left( \sup_{x \in [x_i, x_{i+1}]} (\phi \circ f)(x) - \inf_{x \in [x_i, x_{i+1}]} (\phi \circ f)(x) \right) (x_{i+1} - x_i) \leq \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} M \left( \sup_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x) - \inf_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x) \right) (x_{i+1} - x_i) = \\ &= M(S_{D_\epsilon}^f - s_{D_\epsilon}^f) < M \frac{\epsilon}{M} = \epsilon \end{aligned}$$

che implica la integrabilità di  $\phi \circ f$ .■

La proprietà (vi) ha le seguenti notevoli conseguenze

vi,1) *Sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  integrabile; allora  $|f|$  è integrabile ed inoltre*

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx \quad (2.6)$$

Dimostrazione. È sufficiente applicare la (vi) con  $\phi(y) = |y|$ , per avere la integrabilità di  $|f|$ . Per provare la (2.6), è sufficiente osservare che

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)| \quad \forall x \in [a, b]$$

ed applicare quindi la monotonia dell'integrale e note proprietà del valore assoluto.■

**Osservazione 2.1:** Notiamo che la proprietà (vi,1) provata sopra non può essere invertita, nel senso che esistono funzioni non integrabili secondo Riemann, ma tali da essere integrabili in valore assoluto. È sufficiente considerare la funzione di Dirichlet con  $\alpha = -\beta \neq 0$  per avere una funzione non integrabile, ma tale che  $|f|$  è costante e quindi integrabile.■

vi,2) *Sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  integrabile; allora  $f^n, n \in \mathbb{N}$ , è integrabile.*

Dimostrazione. La funzione  $\phi(y) = y^n$  verifica in  $\mathbb{R}$  la già provata disuguaglianza (si veda il capitolo sui numeri reali)

$$t^n - z^n = (t - z)(t^{n-1} + t^{n-2}z + \dots + tz^{n-2} + z^{n-1})$$

da cui, per  $t, z \in [\inf f, \sup f]$ , segue

$$|t^n - z^n| \leq |t - z| n \max(|\inf f|, |\sup f|)^{n-1}$$

che dà la lipschitzianità di tale  $\phi$  in  $[\inf f, \sup f]$  in modo da poter applicare (vi).■

vi,3) Siano  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  integrabili; allora  $\max(f(x), g(x))$  e  $\min(f(x), g(x))$  sono integrabili.

Dimostrazione. La tesi segue da precedenti proprietà una volta che si osservi che

$$\begin{aligned}\max(f(x), g(x)) &= \frac{f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|}{2} \quad \forall x \in [a, b] \\ \min(f(x), g(x)) &= \frac{f(x) + g(x) - |f(x) - g(x)|}{2} \quad \forall x \in [a, b].\blacksquare\end{aligned}$$

**Esercizio 2.1.** Sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  integrabile. Provare che  $f^+(x) = \max(f(x), 0)$  e  $f^-(x) = \max(-f(x), 0)$  (dette parte positiva e parte negativa di  $f$ ) sono integrabili.■

vi,4) Siano  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  integrabili. Allora  $fg$  è integrabile.

Dimostrazione. È sufficiente usare precedenti proprietà, una volta che si osservi che

$$f(x)g(x) = \frac{(f(x) + g(x))^2 - (f(x) - g(x))^2}{4} \quad \forall x \in [a, b].\blacksquare$$

La proprietà (vi) afferma che la funzione composta  $\phi \circ g$  di una funzione lipschitziana  $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  e di una funzione integrabile secondo Riemann  $g : [c, d] \rightarrow [a, b]$  è ancora integrabile secondo Riemann. L'ipotesi fatta su  $\phi$  non può essere tolta del tutto come il seguente esempio dimostra

**Esempio 2.1.** Sia

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$

e sia  $g$  la funzione di Lebesgue; è facile vedere che  $\phi \circ g$  è la funzione di Dirichlet, che non è integrabile secondo Riemann, mentre le due funzioni componenti lo sono.■

Nel Capitolo 18 dimostreremo (Corollario 10.4) che è sufficiente assumere  $\phi$  continua, per avere la integrabilità di  $\phi \circ g$  (con  $g$  sempre integrabile); mentre nel Capitolo 16 dimostreremo con un esempio che se  $\phi$  è solamente integrabile secondo Riemann, allora  $\phi \circ g$  può non essere integrabile secondo Riemann, anche se  $g$  è continua.

vii) Sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  limitata e integrabile secondo Riemann. Se  $\inf |f| > 0$ , allora  $\frac{1}{f}$  è integrabile secondo Riemann.

Se  $f$  è integrabile, fissato  $\epsilon > 0$  esiste  $D_\epsilon$  tale che  $S_{D_\epsilon} - s_{D_\epsilon} < \epsilon(\inf_{[a,b]} f)^2$ . Poiché si ha

$$\left| \frac{1}{f}(x) - \frac{1}{f}(y) \right| \leq \frac{|f(x) - f(y)|}{(\inf_{[a,b]} f)^2} \quad \forall x, y \in [a, b]$$

e quindi

$$\sup \left\{ \frac{1}{f}(x) : x \in [x_i, x_{i+1}] \right\} - \inf \left\{ \frac{1}{f}(x) : x \in [x_i, x_{i+1}] \right\} \leq$$

$$\frac{\sup\{f(x) : x \in [x_i, x_{i+1}]\} - \inf\{f(x) : x \in [x_i, x_{i+1}]\}}{(\inf_{[a,b]} f)^2}$$

da  $S_{D_\epsilon} - s_{D_\epsilon} < \epsilon (\inf_{[a,b]} f)^2$  segue facilmente che

$$S_{D_\epsilon} - s_{D_\epsilon} < \epsilon$$

disuguaglianza che prova la tesi.

viii) *Monotonia rispetto all'intervallo di integrazione.* Sia  $f : [a, b] \rightarrow [0, +\infty[$  integrabile. Siano  $c, d \in [a, b]$  con  $c < d$ . Allora

$$\int_c^d f(x) dx \leq \int_a^b f(x) dx$$

Dimostrazione. La integrabilità di  $f$  in  $[c, d]$  è già stata provata. Dalla (2.1) si ha

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^d f(x) dx + \int_d^b f(x) dx$$

da cui segue immediatamente la tesi, tenendo conto del fatto che  $f$  è non negativa e che, quindi, vale la (2.4) in  $[a, c]$  e in  $[d, b]$ . ■

**Esercizio 2.2.** Sia  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua. Dimostrare che  $f$  è convessa se e solo se

$$\int_s^t f(y) dy \leq \frac{t-s}{2} [f(s) + f(t)] \quad \forall s, t \in (a, b), s < t. \blacksquare$$

### §3. Il Teorema della Media e l'integrale definito.

Molto importante (nonostante la semplice dimostrazione) è il seguente

**Teorema della Media per l'integrale di Riemann.** *Sia  $f$  definita e integrabile secondo Riemann in  $[a, b]$  a valori in  $\mathbb{R}$ . Allora si ha*

$$\inf\{f(x) : x \in [a, b]\}(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq \sup\{f(x) : x \in [a, b]\}(b-a)$$

Se  $f$  è anche continua, allora esiste  $c \in [a, b]$  tale che

$$\int_a^b f(x) dx = f(c)(b-a).$$

Dimostrazione. Sia  $D$  la decomposizione di  $[a, b]$  ottenuta considerando i punti  $a = x_0 < x_1 = b$ ; dall'Osservazione 1.1 segue che

$$\inf\{f(x) : x \in [a, b]\}(b - a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq \sup\{f(x) : x \in [a, b]\}(b - a)$$

da cui la prima parte della tesi.

Supponiamo, ora, che  $f$  sia continua. Dalla disuguaglianza già ottenuta si ricava facilmente che

$$\inf\{f(x) : x \in [a, b]\} \leq \frac{\int_a^b f(x)dx}{b - a} \leq \sup\{f(x) : x \in [a, b]\}$$

Essendo  $f$  continua l'estremo inferiore di  $f$  è anche il minimo assoluto, così come l'estremo superiore di  $f$  è anche il massimo assoluto; allora il numero  $\frac{\int_a^b f(x)dx}{b - a}$  è compreso fra il minimo ed il massimo di  $f$ ; il Teorema di Darboux (o dei valori intermedi) per le funzioni continue permette di affermare che tale numero fa parte dell'insieme immagine di  $f$ ; quindi esiste  $c \in [a, b]$  tale da soddisfare la seconda parte della tesi. ■

Il precedente risultato può essere esteso, con semplice dimostrazione che viene lasciata allo studente, come segue

**Teorema della Media Generalizzato.** *Sia  $f$  definita e integrabile secondo Riemann in  $[a, b]$  a valori in  $\mathbb{R}$ .*

*Sia  $g : [a, b] \rightarrow [0, +\infty[$  integrabile secondo Riemann in  $[a, b]$ . Allora esiste  $\mu \in [\inf_{[a, b]} f, \sup_{[a, b]} f]$  tale che si ha*

$$\int_a^b (fg)(x)dx = \mu \int_a^b g(x)dx.$$

*Se  $f$  è anche continua, allora esiste  $c \in [a, b]$  tale che*

$$\int_a^b (fg)(x)dx = f(c) \int_a^b g(x)dx.$$

Sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione integrabile secondo Riemann e siano dati due arbitrari punti  $x_0, x_1 \in [a, b]$ ; se  $x_0 < x_1$  sappiamo che  $f$  risulta integrabile in  $[x_0, x_1]$  e quindi ha senso considerare  $\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx$ ; è naturale (ed anche utile come vedremo in seguito) cercare di dare un significato all'integrale precedente quando  $x_0 \geq x_1$ .

**Definizione di integrale definito.** *Sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione integrabile secondo Riemann e siano dati due arbitrari punti  $x_0, x_1 \in [a, b]$ ; porremo allora per definizione*

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx = \text{integrale di Riemann} \quad \text{se} \quad x_0 < x_1$$

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx = 0 \quad \text{se} \quad x_0 = x_1$$

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx = - \int_{x_1}^{x_0} f(x)dx \quad \text{se} \quad x_0 > x_1.$$

Con questa definizione il simbolo  $\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx$  ha allora significato numerico per ogni coppia di punti  $x_0, x_1 \in [a, b]$ ; esso viene chiamato *integrale definito*.

Si hanno le seguenti proprietà la cui dimostrazione segue subito dalle analoghe proprietà dell'integrale di Riemann e dalla definizione sopra considerata e viene pertanto lasciata al lettore (in esse  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  denoteranno funzioni integrabili secondo Riemann in  $[a, b]$  ed  $x_0, x_1, x_2$  punti arbitrari di  $[a, b]$ )

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_1} f(t)dt &= - \int_{x_1}^{x_0} f(t)dt \\ \int_{x_0}^{x_1} cf(x)dx &= c \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx \quad \forall c \in \mathbb{R} \\ \int_{x_0}^{x_1} [f(x) + g(x)]dx &= \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_0}^{x_1} g(x)dx \\ \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx &= \int_{x_0}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{x_1} f(x)dx \\ \left| \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx \right| &\leq \left| \int_{x_0}^{x_1} |f(x)|dx \right| \\ \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx &\geq 0 \quad \text{se} \quad f(x) \geq 0 \quad \text{e} \quad x_0 < x_1 \\ \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx &\leq \int_{x_0}^{x_1} g(x)dx \quad \text{se} \quad f(x) \leq g(x) \quad \text{e} \quad x_0 < x_1. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Introduciamo, ora, la cosiddetta funzione integrale, che come vedremo svolgerà un ruolo determinante nel calcolo dell'integrale definito di una funzione continua (ed anche nel calcolo degli integrali impropri che introdurremo in un capitolo successivo)

**Definizione 3.1.** Sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione integrabile e sia  $x_0 \in [a, b]$ ; allora l'integrale

$$\int_{x_0}^x f(t)dt \quad x \in [a, b],$$

è una ben definita funzione di  $x \in [a, b]$ , che chiameremo *funzione integrale*.

Notiamo che al variare di  $x_0 \in [a, b]$  la funzione integrale varia, cosicché ad ogni funzione  $f$  integrabile sono, in realtà, associate infinite funzioni integrali; per esse dimostriamo alcune importanti proprietà raccolte in unico enunciato

**Teorema 3.1.** Sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  integrabile. Allora

i) due sue qualunque funzioni integrali differiscono per una costante

ii) ogni sua funzione integrale è lipschitziana

iii) se  $f$  è non negativa, ogni sua funzione integrale è non decrescente

iv) se  $f$  è non decrescente, ogni sua funzione integrale è convessa.

Dimostrazione. Le dimostrazioni di (i) e (iii), immediate, vengono lasciate al lettore. Proviamo (ii). Ricordiamo che  $f$  è limitata, cioè che esiste  $M \in \mathbb{R}$  tale che  $|f(x)| \leq M$  per ogni  $x \in [a, b]$ ; se  $x_0 \in [a, b]$  ed inoltre  $F(x) = \int_{x_0}^x f(t)dt$ ,  $x \in [a, b]$ , risulta

$$|F(y) - F(z)| = \left| \int_{x_0}^y f(t)dt - \int_{x_0}^z f(t)dt \right| = \left| \int_z^y f(t)dt \right| \leq \left| \int_z^y |f(t)|dt \right| \leq M|y - z|$$

che è la (ii) della tesi. Dimostriamo, infine, la (iv). Se  $x_0 \in [a, b]$  sia  $F(x) = \int_{x_0}^x f(t)dt$ ,  $x \in [a, b]$ . Per  $x, z \in [a, b]$ ,  $\lambda \in [0, 1]$ , proviamo che

$$F(\lambda x + (1 - \lambda)z) \leq \lambda F(x) + (1 - \lambda)F(z).$$

Posto  $y = \lambda x + (1 - \lambda)z$ , ricaviamo che  $\lambda = \frac{y-z}{x-z}$ ; osserviamo che la tesi equivale a

$$F(y) = \lambda F(x) + (1 - \lambda)F(z) \leq \lambda F(x) + (1 - \lambda)F(z) \Leftrightarrow$$

$$\lambda(F(y) - F(x)) \leq (1 - \lambda)(F(z) - F(y)) \Leftrightarrow$$

$$\lambda \int_x^y f(t)dt \leq (1 - \lambda) \int_y^z f(t)dt \tag{3.1}$$

Poiché  $f$  è non decrescente per ipotesi si ha  $x \leq t \leq y \Rightarrow f(t) \leq f(y)$  e  $y \leq t \leq z \Rightarrow f(y) \leq f(t)$ , da cui discende che

$$\int_x^y f(t)dt \leq \int_x^y f(y)dt = f(y)(y - x), \quad \int_y^z f(t)dt \geq \int_y^z f(y)dt = f(y)(z - y);$$

ne segue che

$$\lambda \int_x^y f(t)dt \leq \frac{y - z}{x - z}(y - x)f(y)$$

ed anche

$$(1 - \lambda) \int_y^z f(t)dt \geq \left(1 - \frac{y - z}{x - z}\right)(z - y)f(y) = \frac{x - y}{x - z}(z - y)f(y)$$

da cui la (3.1) equivalente alla tesi ■

**Esercizio 3.1.** Sia  $f : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$ . Dimostrare che  $f$  è convessa se e solo se esiste una funzione  $g : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  non decrescente tale che

$$f(x) = f(c) + \int_c^x g(t) dt \quad \forall c, x \in ]a, b[.$$

Quindi dimostrare che se  $g : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  non decrescente è tale che

$$f(x) = f(c) + \int_c^x g(t) dt \quad \forall c, x \in ]a, b[,$$

allora  $f'_-(x) \leq g(x) \leq f'_+(x), x \in ]a, b[$ ; infine, provare che per ogni  $g : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  non decrescente tale che  $f'_-(x) \leq g(x) \leq f'_+(x), x \in ]a, b[$ , si ha

$$f(x) = f(c) + \int_c^x g(t) dt \quad \forall c, x \in ]a, b[. \blacksquare$$

Una prima conseguenza di proprietà della funzione integrale è la seguente non immediata altra estensione del Teorema della Media

**Secondo Teorema della Media per l'integrale di Riemann.** *Siano  $f, g$  definite e integrabili secondo Riemann in  $[a, b]$  a valori in  $\mathbb{R}$  con  $g$  monotona (per fissare le idee sia  $g$  non decrescente). Allora esiste  $c \in [a, b]$  tale che*

$$\int_a^b (fg)(x) dx = g(a) \int_a^c f(x) dx + g(b) \int_c^b f(x) dx.$$

Dimostrazione. Possiamo subito osservare che se  $g$  è costante non vi è nulla da provare, cosicché supporremo che  $g(b) \neq g(a)$ . Sia  $D = \{x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_n < x_{n+1} = b\}$  una arbitraria (per ora) decomposizione di  $[a, b]$ ; per ogni  $i = 0, 1, 2, \dots, n$ , scegliamo  $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}], i = 1, 2, \dots, n$ , con  $\xi_0 = a, \xi_n = b$ . Si ha

$$\left| \int_a^b (fg)(x) dx - \sum_{i=0}^n g(\xi_i) \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx \right| = \left| \sum_{i=0}^n \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) [g(x) - g(\xi_i)] dx \right| \leq \sum_{i=0}^n [g(x_{i+1}) - g(x_i)] \left| \int_{x_i}^{x_{i+1}} |f(x)| dx \right|;$$

Poiché la funzione integrale  $x \rightarrow \int_a^x |f(x)| dx : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  è lipschitziana (Teorema 3.1), fissato  $\epsilon > 0$  esiste  $\delta > 0$  tale che, se  $D$  è scelta in modo che  $\max\{x_{i+1} - x_i : i = 0, 1, \dots, n\} < \delta$ , risulta

$$\left| \int_a^b (fg)(x) dx - \sum_{i=0}^n g(\xi_i) \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx \right| \leq \sum_{i=0}^n [g(x_{i+1}) - g(x_i)] \left| \int_{x_i}^{x_{i+1}} |f(x)| dx \right| < \epsilon,$$

qualunque sia la scelta dei punti  $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}], i = 1, 2, \dots, n$ , con  $\xi_0 = a, \xi_n = b$ . Posto adesso  $F(x) = \int_a^x f(t) dt : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , si ha

$$\sum_{i=0}^n g(\xi_i) \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx = \sum_{i=0}^n g(\xi_i) [F(x_{i+1}) - F(x_i)] = - \sum_{i=1}^n F(x_i) [g(\xi_i) - g(\xi_{i-1})] + g(\xi_n) F(x_{n+1})$$

da cui segue facilmente che

$$-(\max_{[a,b]} F) [g(b) - g(a)] + g(b) \int_a^b f(x) dx \leq \sum_{i=0}^n g(\xi_i) \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx \leq -(\min_{[a,b]} F) [g(b) - g(a)] + g(b) \int_a^b f(x) dx$$

e quindi, per l'arbitrarietà di  $\epsilon$ ,

$$-(\max_{[a,b]} F) [g(b) - g(a)] + g(b) \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b (fg)(x) dx \leq -(\min_{[a,b]} F) [g(b) - g(a)] + g(b) \int_a^b f(x) dx$$

da cui deriva che

$$[g(b) - g(a)]^{-1} \left\{ g(b) \int_a^b f(x) dx - \int_a^b (fg)(x) dx \right\} \in [\min_{[a,b]} F, \max_{[a,b]} F];$$

esiste, cioè,  $\mu \in [\min_{[a,b]} F, \max_{[a,b]} F]$  tale che

$$\int_a^b (fg)(x) dx = -\mu [g(b) - g(a)] + g(b) \int_a^b f(x) dx.$$

Dal Teorema di Esistenza degli Zeri (applicabile a  $F$  perché continua) segue allora che esiste  $c \in [a, b]$  tale che  $\mu = \int_a^c f(x) dx$ , uguaglianza da cui deriva facilmente la tesi. ■

**Corollario 3.2.** *Siano  $f, g$  definite e integrabili secondo Riemann in  $[a, b]$  a valori in  $\mathbb{R}$  con  $g$  monotona (per fissare le idee sia  $g$  non decrescente). Allora esiste  $c \in [a, b]$  tale che*

$$\int_a^b (fg)(x) dx = g(a+) \int_a^c f(x) dx + g(b) \int_c^b f(x) dx$$

oppure

$$\int_a^b (fg)(x) dx = g(a) \int_a^c f(x) dx + g(b-) \int_c^b f(x) dx$$

oppure

$$\int_a^b (fg)(x) dx = g(a+) \int_a^c f(x) dx + g(b-) \int_c^b f(x) dx.$$

Dimostrazione. Proviamo solo la prima formula, poiché le altre si ottengono allo stesso modo. Consideriamo una nuova funzione  $g_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  definita ponendo

$$g_1(x) = \begin{cases} g(x) & x \in ]a, b] \\ g(a+) & x = a \end{cases}$$

anch'essa non decrescente (perché?). Applicando alla coppia di funzioni  $f, g_1$  il precedente Teorema otteniamo la tesi. ■

#### §4. Il Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale.

In questo paragrafo dimostreremo un importantissimo risultato che lega l'integrale di Riemann al concetto di primitiva nel caso di funzioni continue. Iniziamo presentando un risultato che mette in luce quella che, probabilmente, è la più importante proprietà delle funzioni integrali

**Teorema di Derivabilità della Funzione Integrale.** *Sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  integrabile secondo Riemann. Se  $x_0 \in [a, b]$ , la funzione integrale  $F(x) = \int_{x_0}^x f(t)dt : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  è derivabile in ogni punto  $x_1 \in [a, b]$  dove  $f$  è continua; inoltre, si ha  $F'(x_1) = f(x_1)$ .*

*Dimostrazione.* Sia  $x_1 \in [a, b]$  un punto di continuità per  $f$ . Consideriamo, per  $h \in \mathbb{R}, h \neq 0$ , tale che  $x_1 + h \in [a, b]$ , il rapporto incrementale di  $F$  ed osserviamo (supponendo, tanto per fissare le idee, che  $h > 0$ ) che si ha

$$\frac{F(x_1 + h) - F(x_1)}{h} = \frac{\int_{x_0}^{x_1+h} f(t)dt - \int_{x_0}^{x_1} f(t)dt}{h} = \frac{\int_{x_1}^{x_1+h} f(t)dt}{h} \in \left[ \inf_{[x_1, x_1+h]} f, \sup_{[x_1, x_1+h]} f \right],$$

dove l'ultima relazione di appartenenza è conseguenza del Teorema della Media. La continuità di  $f$  in  $x_1$  implica che per ogni  $\epsilon > 0$  esiste  $\delta > 0$  tale che da  $x \in [a, b], |x - x_1| < \delta$  segue che  $|f(x) - f(x_1)| < \epsilon$ ; ne viene che  $f(x_1) - \epsilon < f(x) < f(x_1) + \epsilon$  per  $x \in [a, b], |x - x_1| < \delta$ ; quindi,  $f(x_1) - \epsilon \leq \inf_{]x_1-\delta, x_1+\delta[} f \leq \sup_{]x_1-\delta, x_1+\delta[} f \leq f(x_1) + \epsilon$ . Se adesso  $h < \delta$  ricaviamo facilmente che  $\inf_{]x_1-\delta, x_1+\delta[} f \leq \inf_{[x_1, x_1+h]} f \leq \sup_{[x_1, x_1+h]} f \leq \sup_{]x_1-\delta, x_1+\delta[} f$  e quindi, da quanto già osservato, che

$$\left| \frac{\int_{x_1}^{x_1+h} f(t)dt}{h} - f(x_1) \right| \leq \epsilon;$$

quanto provato è la tesi. ■

La principale conseguenza del precedente risultato è il seguente teorema, la cui dimostrazione è, a questo punto, immediata

**Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale (Torricelli-Barrow).** *Sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua e sia  $x_0 \in [a, b]$ . Allora la funzione integrale*

$$F(x) = \int_{x_0}^x f(t)dt \quad \forall x \in [a, b],$$

*è una primitiva di  $f$ .*

**Osservazione 4.1:** Il Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale ed il Teorema di Lagrange (applicato alla funzione integrale) permettono di affermare che, nella seconda parte del Teorema della Media, il punto  $c$  della tesi si trova in  $]a, b[$ . ■

Nel Teorema di Torricelli-Barrow l'ipotesi di continuità non può essere tolta; infatti, supponiamo che  $f$  sia integrabile secondo Riemann, ma non continua (per esempio  $f$  sia non continua e monotona, con discontinuità, quindi, di prima specie o eliminabili); allora ogni sua funzione integrale ha senso, come osservato sopra, ma nessuna di esse può essere una primitiva per  $f$ , poiché  $f$  è priva di primitive. Si noti anche che l'esistenza di primitive non implica l'integrabilità secondo Riemann; a tal fine si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

e la sua derivata

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} \cos \frac{1}{x^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$f'$  è dotata di primitive, ma essendo non limitata in ogni intorno di  $x = 0$  (la dimostrazione viene lasciata al lettore) non è integrabile secondo Riemann nell'intervallo  $[-1, 1]$ .

**Esercizio 4.1.** Sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continua. Dire se data una sua primitiva  $F$  essa è una funzione integrale, cioè esiste  $x_0 \in [a, b]$  tale che  $F(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt, x \in [a, b]$ , giustificando la risposta. In caso di risposta negativa, dire anche se esistono funzioni per le quali la risposta è positiva, individuando una condizione sufficiente che deve essere soddisfatta da una funzione  $f$  perchè ogni sua primitiva sia una funzione integrale. La condizione trovata è anche necessaria?■

**Corollario 4.1.** Sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua e sia  $G$  una qualunque primitiva di  $f$ . Allora

$$\int_a^b f(t) dt = G(b) - G(a).$$

Dimostrazione. Dal precedente Teorema Fondamentale sappiamo che la funzione

$$F(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt \quad \forall x \in [a, b],$$

è una primitiva di  $f$  (qualunque sia il punto  $x_0$  che scegliamo in  $[a, b]$ ). È allora noto (Capitolo 10) che tale  $F$  e  $G$  differiscono per una costante  $k \in \mathbb{R}$ ; cioè  $G(x) - F(x) = k$ , per ogni  $x \in [a, b]$ , e quindi

$$\begin{aligned} G(b) - F(b) &= k = G(a) - G(b) \Leftrightarrow \\ G(b) - G(a) &= F(b) - F(a) = \int_{x_0}^b f(t) dt - \int_{x_0}^a f(t) dt = \int_b^a f(t) dt. \end{aligned}$$

La dimostrazione è conclusa.■

Il precedente Corollario 4.1 serve a spiegare come è possibile calcolare il valore dell'integrale di Riemann per

una funzione continua; vedremo in seguito come è possibile determinare il valore di tale integrale per altre classi di funzioni integrabili secondo Riemann (per esempio, quella delle funzioni generalmente continue e limitate).

**Esercizio 4.2.** Sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione integrabile secondo Riemann e sia  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una sua primitiva. Provare che  $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$ .■

Sempre dal Corollario 4.1 segue (con le stesse notazioni) che per ogni coppia di punti  $x_0, x_1 \in [a, b]$  risulta

$$\int_{x_0}^{x_1} f(t) dt = G(x_1) - G(x_0)$$

(la dimostrazione viene lasciata al lettore); la differenza  $G(x_1) - G(x_0)$  viene a volte indicata con  $[G(t)]_{x_0}^{x_1}$ .

**Esempio 4.1.** Si voglia calcolare l'integrale definito seguente

$$\int_0^\pi \frac{dx}{\cos^2 x + \sin 2x + 1}$$

Osserviamo innanzitutto che, essendo  $\cos^2 x \geq 0$  e  $\sin 2x + 1 \geq 0$ , il denominatore si annulla se e solo se  $\cos^2 x = 0$  e  $\sin 2x + 1 = 0$ , un fatto che in  $[0, \pi]$  non si verifica mai; quindi la funzione data è definita, continua e positiva in  $[0, \pi]$ ; ne segue in particolare che il precedente integrale dovrà essere positivo. Nel Capitolo 12 abbiamo già calcolato una primitiva della funzione integranda negli intervalli  $[0, \frac{\pi}{2}[$  e  $]\frac{\pi}{2}, \pi]$ ; essa è la funzione  $\arctg(\operatorname{tg} x + 1)$ ; tenendo conto della "osservazione importante" fatta all'inizio del capitolo sull'integrazione indefinita abbiamo scritto che tutte e solo le primitive della funzione integranda in  $[0, \pi] \setminus \{0\}$  sono le funzioni del tipo

$$G(x) = \begin{cases} \arctg(\operatorname{tg} x + 1) + c_1 & x \in [0, \pi/2[ \\ \arctg(\operatorname{tg} x + 1) + c_2 & x \in ]\pi/2, \pi] \end{cases}$$

che sono poi state "incollate" mediante un procedimento di limite per  $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$ , ottenendo così che tutte e solo le primitive in  $[0, \pi]$  sono le funzioni

$$G(x) = \begin{cases} \arctg(\operatorname{tg} x + 1) + c_1 & x \in [0, \pi/2[ \\ \pi/2 + c_1 & x = \pi/2 \\ \arctg(\operatorname{tg} x + 1) + \pi + c_1 & x \in ]\pi/2, \pi] \end{cases}$$

È allora facile verificare che

$$\int_0^\pi \frac{dx}{\cos^2 x + \sin 2x + 1} = \pi.$$

Se nel calcolo di tali primitive (effettuato nel Capitolo 12) non avessimo tenuto conto della "osservazione importante" come abbiamo fatto ed avessimo considerato come primitive le funzioni del tipo  $F(x) =$

$\arctg(\operatorname{tg}x + 1) + c$ , avremmo ottenuto

$$\int_0^\pi \frac{dx}{\cos^2 x + \sin 2x + 1} = 0$$

come facilmente si verifica; ma per quanto osservato all'inizio, ciò è impossibile essendo la funzione integranda positiva e continua in  $[0, \pi]$ .

**Esercizio 4.3.** Dopo aver dimostrato che gli integrali definiti seguenti

$$\int_0^\pi \frac{3 \sin^2 x \cos^2 x}{2 \cos^6 x + 2 \sin^3 x \cos^3 x + \sin^6 x} dx, \int_0^\pi \frac{dx}{13 \cos^2 x + 8 \sin 2x + 4}$$

devono essere positivi, calcolarne il valore.■

Valgono i seguenti risultati, conseguenze del Corollario 4.1

**Formula di Integrazione per Parti per l'integrale definito.** Siano  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  due funzioni derivabili con derivate continue ed  $x_0, x_1$  due punti arbitrari di  $[a, b]$ . Allora si ha la seguente formula

$$\int_{x_0}^{x_1} f'(x)g(x)dx = (f(x_1)g(x_1) - f(x_0)g(x_0)) - \int_{x_0}^{x_1} f(x)g'(x)dx$$

Dimostrazione. Una primitiva della funzione  $f'g + fg'$  è la funzione  $fg$ ; quindi per il Corollario 4.1 si ha

$$\int_{x_0}^{x_1} f'(x)g(x)dx + \int_{x_0}^{x_1} f(x)g'(x)dx = f(x_1)g(x_1) - f(x_0)g(x_0)$$

che è la nostra tesi.■

La Formula di Integrazione per Parti ha come conseguenza il seguente risultato relativo alla *Formula di Taylor con resto in forma integrale*

**Formula di Taylor con Resto in Forma Integrale.** Sia  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione di classe  $C^{n+1}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , in tutto  $(a, b)$ . Per ogni coppia di punti  $x, x_0 \in (a, b)$  sussiste l'identità seguente

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + \int_{x_0}^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x - t)^n dt,$$

detta "Formula di Taylor con Resto in Forma Integrale".

Dimostrazione. Dimostreremo la tesi procedendo per induzione su  $n$ ; se  $n = 0$  la tesi segue immediatamente dal Corollario 4.1. Se adesso ammettiamo vera la tesi per  $n - 1$ , dobbiamo dimostrarla nel caso generale  $n$ ; possiamo intanto scrivere, grazie all'ipotesi di induzione, che

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + \int_{x_0}^x \frac{f^n(t)}{(n-1)!} (x - t)^{n-1} dt \quad (4.1);$$

adesso usiamo la Formula di Integrazione per Parti per calcolare l'ultimo integrale ottenendo che

$$\int_{x_0}^x \frac{f^n(t)}{(n-1)!} (x-t)^{n-1} dt = \frac{f^n(x_0)}{n} (x-x_0)^n + \int_{x_0}^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x-t)^n dt;$$

una banale sostituzione nella formula (4.1) conclude la dimostrazione. ■

**Esercizio 4.4.** Utilizzando la precedente Formula di Taylor dimostrare che se  $f : [x_0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  è ivi di classe  $C^2$ , limitata per  $x \in [x_0, +\infty[$  e con  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f''(x) = 0$ , allora deve aversi  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$ . ■

**Primo Teorema di Integrazione per Sostituzione per l'integrale definito.** *Sia  $f$  una funzione reale definita in  $[a, b]$ , ivi continua, e sia  $g$  una funzione reale definita in  $[c, d]$  ed ivi derivabile con derivata continua, a valori in  $[a, b]$ . Siano  $x_0, x_1 \in [c, d]$ . Allora vale la seguente formula di integrazione per sostituzione*

$$\int_{x_0}^{x_1} f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(x_0)}^{g(x_1)} f(t)dt$$

Dimostrazione. Sia  $F$  una primitiva di  $f$ ; allora si ha

$$\int_{g(x_0)}^{g(x_1)} f(t)dt = F(g(x_1)) - F(g(x_0)).$$

D'altra parte, la funzione  $F(g)$  è una primitiva della funzione  $f(g(x))g'(x)$ , cosicché

$$\int_{x_0}^{x_1} f(g(x))g'(x)dx = F(g(x_1)) - F(g(x_0)).$$

Quindi i numeri che compaiono nei due membri della tesi sono uguali. ■

Se si suppone che la funzione  $g$  che dà luogo alla sostituzione nel precedente Teorema è invertibile, allora è possibile stabilire un (Secondo) Teorema di Sostituzione, che avremo modo di utilizzare in seguito, sotto ipotesi per  $f$  molto più generali; per dimostrare tale risultato (caso particolare del Teorema di Cambiamento di Variabili per l'integrale di Riemann per le funzioni di più variabili che proveremo nel Capitolo 23) occorre premettere una definizione ed un Lemma

**Definizione 4.1.** *Sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione; diremo che  $f$  è una funzione a scala se esiste una decomposizione  $D = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n < x_{n+1} = b\}$  di  $[a, b]$  tale che  $f$  è costante su ogni sottointervallo  $]x_i, x_{i+1}[$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ .*

È facile vedere che ogni funzione a scala  $s$  è integrabile secondo Riemann e che

$$\int_a^b s(x) dx = \sum_{i=0}^n s\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right) (x_{i+1} - x_i)$$

(la dimostrazione viene lasciata al lettore). Dimostriamo il seguente interessante fatto

**Lemma 4.2.** Sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione integrabile secondo Riemann. Per ogni  $\epsilon > 0$  esistono due funzioni a scala  $h_\epsilon, k_\epsilon : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  tali che

$$h_\epsilon(x) \leq f(x) \leq k_\epsilon(x) \quad \forall x \in [a, b], \quad \int_a^b k_\epsilon(x) dx - \int_a^b h_\epsilon(x) dx < \epsilon.$$

Dimostrazione. Sia  $\epsilon > 0$ ; esiste allora una decomposizione  $D_\epsilon = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n < x_{n+1} = b\}$  di  $[a, b]$  tale che  $S_{D_\epsilon} - s_{D_\epsilon} < \epsilon$ ; possiamo adesso definire le due funzioni a scala cercate come segue

$$h_\epsilon(x) = \inf\{f(x) : x \in [x_i, x_{i+1}]\} \quad x \in [x_i, x_{i+1}[ , i = 0, 1, \dots, n,$$

$$h_\epsilon(x) = \inf\{f(x) : x \in [x_n, x_{n+1}]\} \quad x \in [x_n, x_{n+1}]$$

oppure ponendo

$$h_\epsilon(x) = \inf\{f(x) : x \in [x_i, x_{i+1}]\} \quad x \in ]x_i, x_{i+1}], i = 1, 2, \dots, n + 1,$$

$$h_\epsilon(x) = \inf\{f(x) : x \in [x_0, x_1]\} \quad x \in [x_0, x_1]$$

ed anche

$$k_\epsilon(x) = \sup\{f(x) : x \in [x_i, x_{i+1}]\} \quad x \in [x_i, x_{i+1}[ , i = 0, 1, \dots, n,$$

$$k_\epsilon(x) = \sup\{f(x) : x \in [x_n, x_{n+1}]\} \quad x \in [x_n, x_{n+1}]$$

oppure

$$k_\epsilon(x) = \sup\{f(x) : x \in [x_i, x_{i+1}]\} \quad x \in ]x_i, x_{i+1}], i = 1, 2, \dots, n + 1,$$

$$k_\epsilon(x) = \sup\{f(x) : x \in [x_0, x_1]\} \quad x \in [x_0, x_1].$$

È facile vedere che esse hanno le proprietà richieste (la dimostrazione viene lasciata al lettore).■

**Esercizio 4.5.** Sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione tale che per ogni  $\epsilon > 0$  esistono due funzioni a scala  $h_\epsilon, k_\epsilon : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  tali che

$$h_\epsilon(x) \leq f(x) \leq k_\epsilon(x) \quad \forall x \in [a, b], \quad \int_a^b k_\epsilon(x) dx - \int_a^b h_\epsilon(x) dx < \epsilon.$$

Provare che  $f$  è integrabile secondo Riemann.■

**Secondo Teorema di Integrazione per Sostituzione per l'integrale definito.** Sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione integrabile secondo Riemann e sia  $g$  una funzione reale definita in  $[c, d]$ , ivi derivabile con derivata continua, a valori su  $[a, b]$  ed invertibile. Siano  $y_0, y_1 \in [c, d]$ . Allora vale la seguente formula di integrazione per sostituzione

$$\int_{y_0}^{y_1} f(g(y))g'(y)dy = \int_{g(y_0)}^{g(y_1)} f(x)dx.$$

Dimostrazione. È ovvio che basta provare la tesi per l'integrale di Riemann; possiamo quindi supporre che  $c = y_0, d = y_1$ . Osserviamo inoltre che le ipotesi su  $g$  permettono di asserire che  $g'$  è non negativa o non positiva su  $[c, d]$  (per noti risultati del Capitolo 10); per fissare le idee supporremo che  $g'$  sia non negativa. Scelto, adesso,  $\epsilon > 0$  esiste una decomposizione  $D_\epsilon = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n < x_{n+1} = b\}$  di  $[a, b]$  tale che  $S_{D_\epsilon} - s_{D_\epsilon} < \epsilon$  e due funzioni a scala  $h_\epsilon, k_\epsilon : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  definite a partire da tale decomposizione, con le proprietà descritte nel Lemma 4.2; è facile vedere che tale decomposizione di  $[a, b]$  dà origine ad una decomposizione  $D'_\epsilon = \{c = g^{-1}(x_0) < g^{-1}(x_1) < \dots < g^{-1}(x_n) < g^{-1}(x_{n+1}) = d\}$  di  $[c, d]$  con  $h_\epsilon \circ g, k_\epsilon \circ g$  funzioni a scala costanti all'interno degli intervalli della decomposizione  $D'_\epsilon$ ; si ha facilmente

$$h_\epsilon(g(y))g'(y) \leq f(g(y))g'(y) \leq k_\epsilon(g(y))g'(y) \quad \forall y \in [c, d]$$

e quindi

$$\int_c^d h_\epsilon(g(y))g'(y) dy \leq \int_c^d f(g(y))g'(y) dy \leq \int_c^d k_\epsilon(g(y))g'(y) dy;$$

d'altra parte, detto  $h_i^\epsilon$  (risp.  $k_i^\epsilon$ ) il valore di  $h_\epsilon$  (risp.  $k_\epsilon$ ) sull' $i$ -esimo intervallo della decomposizione  $D_\epsilon$ , si ha facilmente

$$\begin{aligned} \int_c^d h_\epsilon(g(y))g'(y) dy &= \sum_{i=0}^n \int_{g^{-1}(x_i)}^{g^{-1}(x_{i+1})} h_i^\epsilon g'(y) dy = \sum_{i=0}^n \int_{x_i}^{x_{i+1}} h_i^\epsilon dx = \int_a^b h_\epsilon(x) dx \\ \int_c^d k_\epsilon(g(y))g'(y) dy &= \sum_{i=0}^n \int_{g^{-1}(x_i)}^{g^{-1}(x_{i+1})} k_i^\epsilon g'(y) dy = \sum_{i=0}^n \int_{x_i}^{x_{i+1}} k_i^\epsilon dx = \int_a^b k_\epsilon(x) dx. \end{aligned}$$

Dalle uguaglianze appena provate e dalla disuguaglianze verificate dalla funzioni  $h_\epsilon, k_\epsilon$  (si veda la tesi del Lemma 4.2) segue facilmente che

$$\left| \int_c^d f(g(y))g'(y)dy - \int_a^b f(x)dx \right| < \epsilon;$$

l'arbitrarietà di  $\epsilon$  permette di concludere come richiesto nella tesi. ■

**Esercizio 4.6.** Sia  $r > 0$  ed  $f : [-r, r] \rightarrow \mathbb{R}$  integrabile secondo Riemann. Dimostrare che se  $f$  è funzione pari, allora

$$\int_{-r}^r f(x) dx = 2 \int_0^r f(x) dx, \quad \int_0^r f(x) dx = \int_0^r f(-x) dx.$$

Quanto valgono  $\int_{-r}^r f(x) dx$ ,  $\int_0^r f(x) dx$ ,  $\int_0^r f(-x) dx$  nel caso in cui  $f$  sia funzione dispari? ■

§5. Significato geometrico dell'integrale di Riemann.

L'integrale di Riemann ha anche un interessante significato da un punto di vista geometrico, che chiarisce anche il motivo della definizione adottata; già Archimede (ma probabilmente il suo metodo di esaustione è ancora più antico) cercò di calcolare l'area di alcune figure elementari ricorrendo a un procedimento che sta alla base della Teoria della Misura di Peano-Jordan e che lega quest'ultima all'integrale di Riemann.

Per spiegare tale significato dobbiamo introdurre il concetto di insiemi piani misurabili secondo Peano-Jordan; faremo ciò in modo conciso, poiché questa teoria sarà ampiamente trattata nel Capitolo 22; in pratica tenteremo di estendere il concetto di area di certi insiemi piani già noto dalla Geometria Euclidea a famiglie più ampie di sottoinsiemi, cercando di mantenere il maggior numero possibile delle buone proprietà di cui quel concetto godeva.

Come già detto considereremo solo insiemi piani, cioè sottoinsiemi di  $\mathbb{R}^2$ . Innanzitutto, conveniamo di considerare misurabile secondo Peano-Jordan l'insieme vuoto, ponendo, per definizione,  $m(\emptyset) = 0$  (il simbolo  $m(X)$  si leggerà sempre "misura di  $X$ ").

Chiameremo poi *insiemi elementari* i rettangoli chiusi con lati paralleli agli assi coordinati in  $\mathbb{R}^2$ , cioè gli insiemi del tipo  $\Delta = [a, b] \times [c, d]$ , con  $a < b, c < d$ . Un tale insieme sarà per noi misurabile secondo Peano-Jordan; definiremo *misura  $m$  di un insieme elementare  $\Delta$*  la sua misura (o area) nel senso della Geometria Euclidea, cioè il numero  $m(\Delta) = (b - a)(d - c)$ .

Chiameremo *pluriintervallo o plurirettangolo* ogni insieme che risulta unione di un numero finito di insiemi elementari a due a due privi di punti interni comuni; un tale insieme lo penseremo sempre misurabile secondo Peano-Jordan e ne definiremo la misura  $m(X)$  come somma delle misure degli insiemi elementari che lo compongono. Osserviamo che ogni plurirettangolo può essere decomposto in differenti modi come unione di un numero finito di insiemi elementari a due a due privi di punti interni comuni; tuttavia, si può provare che la sua misura non dipende dalla decomposizione scelta per calcolarla.

Una importante proprietà della misura dei plurirettangoli è la seguente:

$$\text{se } P, Q \text{ sono due plurirettangoli con } P \subset Q \text{ allora } m(P) \leq m(Q).$$

Fino a questo punto non abbiamo in effetti fatto grossi passi avanti rispetto a quanto già noto dalla Geometria Euclidea; proviamo adesso a considerare insiemi di tipo meno elementare (ci serviremo qui delle nozioni topologiche introdotte in precedenza in  $\mathbb{R}^2$ ).

Consideriamo le tre seguenti classi di sottoinsiemi di  $\mathbb{R}^2$

- 1) insiemi  $X$  con punti interni e limitati
- 2) insiemi  $X$  privi di punti interni e limitati
- 3) insiemi  $X$  non limitati.

Se  $X$  appartiene alla prima classe, esistono sia plurirettangoli contenuti in  $X$  che plurirettangoli contenenti  $X$ ; consideriamo allora i seguenti insiemi numerici

$$s = \{m(P) : P \subset X, P \text{ plurirettangolo}\} \quad S = \{m(Q) : Q \supset X, Q \text{ plurirettangolo}\}$$

È chiaro che ogni elemento di  $s$  è un minorante per  $S$ , così come ogni elemento di  $S$  è un maggiorante per  $s$ ; ne viene che

$$\sup s \in \mathbb{R}, \inf S \in \mathbb{R} \quad \text{e che} \quad \sup s \leq \inf S$$

**Definizione 5.1.** Diremo che  $X$  è misurabile secondo Peano-Jordan se

$$\sup s = \inf S$$

e in tale caso porremo

$$m(X) = \sup s = \inf S.$$

Se  $X$  appartiene alla seconda classe, osserviamo innanzitutto che non possono esistere plurirettangoli contenuti in  $X$ ; quindi l'insieme  $s$  del primo caso è vuoto, mentre continua ad essere non vuoto l'insieme  $S$ , di cui possiamo considerare l'estremo inferiore che deve ovviamente essere un numero reale non negativo.

**Definizione 5.2.** Diremo che  $X$  è misurabile secondo Peano-Jordan se

$$\inf S = 0$$

e porremo, in tale caso,

$$m(X) = 0.$$

**Esercizio 5.1.** Provare che ogni sottoinsieme di un insieme misurabile con misura nulla è anch'esso misurabile con misura nulla. ■

Infine, consideriamo gli insiemi della terza classe. Se  $\Delta$  denota un arbitrario insieme elementare, allora l'insieme  $X \cap \Delta$  è limitato e quindi appartiene ad una delle due classi per le quali la misura di Peano-Jordan è già stata definita.

**Definizione 5.3.** Diremo che  $X$  è misurabile secondo Peano-Jordan se gli insiemi  $X \cap \Delta$  sono misurabili al variare in tutti i modi possibili di  $\Delta$  nella famiglia degli insiemi elementari; in tale caso porremo

$$m(X) = \sup\{m(X \cap \Delta) : \Delta \text{ insieme elementare}\}$$

Osserviamo che un punto è un insieme misurabile di misura nulla in  $\mathbb{R}^2$  (la dimostrazione viene lasciata al lettore). Proviamo che un qualunque segmento in  $\mathbb{R}^2$  è misurabile e di misura nulla; sia  $AB$  un segmento di  $\mathbb{R}^2$ , con  $A = (x_A, y_A), B = (x_B, y_B)$  e in un primo momento supponiamo che  $x_A = x_B$ ; fissato  $\epsilon > 0$  consideriamo un rettangolo  $\Delta$  di vertici  $A, B, C, D$  avente per base  $BC$  un segmento di lunghezza  $\frac{\epsilon}{2|y_B - y_A|}$ ; esso contiene il segmento dato e la sua misura è inferiore ad  $\epsilon$ ; l'arbitrarietà di  $\epsilon$  implica, a norma di definizione, che  $m(AB) = 0$ . Adesso sia  $x_A \neq x_B$  e, tanto per fissare le idee, supponiamo che  $x_A < x_B, y_A \leq y_B$  (in maniera analoga si procede negli altri casi) ed anche che la retta per  $A$  e  $B$  abbia equazione  $y = sx + n$ . Segliamo  $p \in \mathbb{N}$  tale che  $p > \frac{l^2 s}{\epsilon}$ , dove  $l = x_B - x_A$ , e quindi consideriamo i seguenti punti sull'asse delle ascisse

$$z_0 = x_A, z_i = x_A + i \frac{l}{p} \quad i = 1, 2, \dots, p;$$

posto  $y_j = sz_j + n, j = 0, 1, 2, \dots, p$ , consideriamo il plurirettangolo

$$\mathcal{R} = \bigcup_{j=0}^{p-1} [z_j, z_{j+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$$

che contiene il segmento  $AB$  considerato; si ha anche

$$m(\mathcal{R}) = \sum_{j=0}^{p-1} m([z_j, z_{j+1}] \times [y_j, y_{j+1}]) = \sum_{j=0}^{p-1} s(z_{j+1} - z_j)^2 = \sum_{j=0}^{p-1} s \frac{l^2}{p^2} = s \frac{l^2}{p} < \epsilon;$$

l'arbitrarietà di  $\epsilon$  permette ancora di concludere che  $m(AB) = 0$ . ■

Osserviamo anche che un insieme non limitato può avere misura infinita (per esempio  $m(\mathbb{R}^2) = +\infty$ ; la dimostrazione viene lasciata al lettore) od anche misura finita (ogni retta in  $\mathbb{R}^2$  ha misura finita, esattamente nulla; la dimostrazione viene lasciata al lettore).

Si osservi che in ognuna delle tre classi considerate esistono insiemi non misurabili secondo Peano-Jordan (come vedremo nel Capitolo 22); per il momento ci limitiamo alla costruzione di un insieme non vuoto, limitato e privo di punti interni non misurabile secondo Peano-Jordan. Sia  $X = ([0, 1] \cap \mathbb{Q})^2$ ;  $X$  è ovviamente

limitato e non ha punti interni (se esso avesse un punto interno dovrebbe contenere un intero cerchio aperto e quindi punti con almeno una coordinata irrazionale). Se  $X$  fosse misurabile dovrebbe allora aversi che l'estremo inferiore delle misure dei plurirettangoli contenenti  $X$  dovrebbe essere uguale a 0; proveremo che tale fatto non può verificarsi, cosicché ne seguirà la non misurabilità di  $X$ . Sia  $P$  un plurirettangolo contenente  $X$ ; poiché  $P$  è chiuso (unione di un numero finito di chiusi) deve aversi  $\overline{X} \subset P$ ; proviamo adesso che  $\overline{X} = [0, 1]^2$ , fatto da cui faremo discendere la tesi; è chiaro che  $\overline{X} \subset [0, 1]^2$ , cosicché rimane solo da provare la inclusione contraria; se  $T \in [0, 1]^2$  in ogni suo intorno troviamo punti con entrambi le coordinate razionali, per ben note proprietà dei numeri razionali, e quindi punti di  $X$ ; allora ogni  $T \in [0, 1]^2$  è punto della chiusura di  $X$ , che era quanto volevamo provare. Sapendo che  $[0, 1]^2 = \overline{X} \subset P$  possiamo affermare che  $m(P) \geq 1$  e quindi che l'estremo inferiore delle misure dei plurirettangoli contenenti  $X$  non può essere 0; ne segue la non misurabilità di  $X$ .

La famiglia degli insiemi misurabili secondo Peano-Jordan gode della seguente proprietà di stabilità

**Proposizione 5.1.** *Dati due insiemi  $X_1, X_2$  misurabili, anche gli insiemi  $X_1 \cup X_2, X_1 \cap X_2, X_1 \setminus X_2$  risultano misurabili.*

Non è invece vero che l'unione di infiniti insiemi misurabili è misurabile (l'insieme non misurabile secondo Peano-Jordan costruito in precedenza è unione numerabile degli insiemi costituiti dai singoli punti, che sono insiemi misurabili).

**Esercizio 5.2.** Costruire esempi di insiemi appartenenti alle altre due classi di sottoinsiemi di  $\mathbb{R}^2$  sopra considerate che siano non misurabili secondo Peano-Jordan.■

**Proposizione 5.2.** *La misura secondo Peano-Jordan gode delle seguenti proprietà:*

- 1) *positività:  $m(X) \geq 0$  per ogni insieme  $X$  misurabile*
- 2) *monotonìa:  $m(X) \leq m(Y)$  per ogni coppia di insiemi misurabili  $X, Y$  con  $X \subset Y$*
- 3) *finita subadditività:  $m(X_1 \cup X_2) \leq m(X_1) + m(X_2)$  per ogni coppia di insiemi misurabili  $X_1, X_2$*
- 4) *finita additività:  $m(X_1 \cup X_2) = m(X_1) + m(X_2)$  per ogni coppia di insiemi misurabili  $X_1, X_2$  disgiunti*
- 5) *modularità:  $m(X_1 \cup X_2) = m(X_1) + m(X_2) - m(X_1 \cap X_2)$  per ogni coppia di insiemi misurabili  $X_1, X_2$*
- 6) *sottrattività:  $m(X_1 \setminus X_2) = m(X_1) - m(X_2)$  per ogni coppia di insiemi misurabili  $X_1, X_2$  con  $X_2 \subset X_1$ .*

È anche importante notare che se  $X$  è un insieme misurabile secondo Peano-Jordan ogni suo traslato è anch'esso misurabile con misura che non varia per traslazione (*invarianza per traslazione* della misura di

Peano-Jordan).

**Definizione 5.4.** Sia ora  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione integrabile che assume valori non negativi. Definiamo rettangoloide (o trapezoido) il seguente insieme di  $\mathbb{R}^2$

$$T = \{(x, y) : x \in [a, b], 0 \leq y \leq f(x)\}.$$

Vogliamo provare che la integrabilità di  $f$  implica la misurabilità di  $T$  e che si ha

$$\int_a^b f(x) dx = m(T).$$

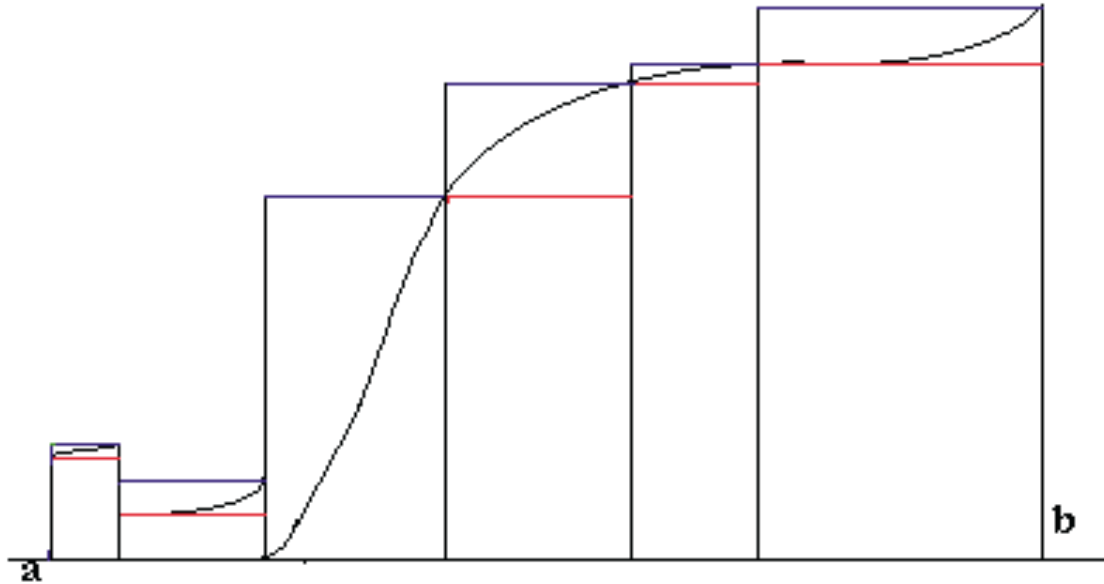
Possiamo avere i seguenti due casi:

(i) per ogni  $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$  si ha  $\inf\{f(x) : x \in [\alpha, \beta]\} = 0$  (la funzione identicamente nulla rientra in questo caso, così come vi rientra la funzione di Lebesgue);

(ii) esiste  $[\alpha^*, \beta^*] \subset [a, b]$  tale che  $\inf\{f(x) : x \in [\alpha^*, \beta^*]\} > 0$ ;

nel caso (i) è chiaro che ogni somma inferiore vale zero, cosicché  $\int_a^b f(x) dx = 0$ ; in questo caso, fissato  $\epsilon > 0$  deve esistere una decomposizione  $D_\epsilon$  di  $[a, b]$  tale che  $S_{D_\epsilon} < \epsilon$ , per la definizione di integrabilità secondo Riemann; notiamo (la dimostrazione viene lasciata al lettore) che  $S_{D_\epsilon}$  è la misura di un plurirettangolo  $\mathcal{P} \supset T$ , fatto da cui segue che l'estremo inferiore delle misure dei plurirettangoli contenenti  $T$  vale 0; quindi

$T$  risulta misurabile con misura nulla; in questo caso la tesi è acquisita. Supponiamo, adesso, che valga la (ii). Dalla integrabilità di  $f$  segue che per ogni  $\epsilon > 0$  esiste una decomposizione  $D_\epsilon$  tale che  $S_{D_\epsilon} - s_{D_\epsilon} < \epsilon$ ; possiamo supporre che  $D_\epsilon$  contenga i punti  $\alpha^*, \beta^*$  (perché?); ancora una volta (la dimostrazione viene lasciata al lettore) osserviamo che  $S_{D_\epsilon}$  è la misura di un plurirettangolo  $\mathcal{P}_1$  contenente  $T$ , mentre  $s_{D_\epsilon}$  è la misura di un plurirettangolo  $\mathcal{P}_2$  contenuto in  $T$ ;



quindi possiamo concludere che esistono un plurirettangolo  $\mathcal{P}_1$  contenente  $T$  ed uno  $\mathcal{P}_2$  contenuto in  $T$  tali che

$$S_{D_\epsilon} - s_{D_\epsilon} = m(\mathcal{P}_1) - m(\mathcal{P}_2) < \epsilon$$

da cui segue la misurabilità di  $T$ ; inoltre si ha

$$\int_a^b f(x)dx - m(T) \leq S_{D_\epsilon} - m(\mathcal{P}_2) = S_{D_\epsilon} - s_{D_\epsilon} < \epsilon$$

ed anche

$$m(T) - \int_a^b f(x)dx \leq m(\mathcal{P}_1) - s_{D_\epsilon} = S_{D_\epsilon} - s_{D_\epsilon} < \epsilon$$

da cui segue che

$$\left| \int_a^b f(x)dx - m(T) \right| < \epsilon \quad \forall \epsilon > 0$$

e quindi che

$$\int_a^b f(x)dx = m(T)$$

per note proprietà del valore assoluto.■

Osserviamo anche, rinviando la dimostrazione al Capitolo 23, che se  $T$  è misurabile, allora  $f$  è integrabile (e si ha sempre  $\int_a^b f(x)dx = m(T)$ ).

**Esercizio 5.3.** Sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  integrabile; provare che  $gr(f)$  è misurabile secondo Peano-Jordan con misura nulla.■

**Esercizio 5.4.** Siano  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  due funzioni integrabili con  $f(x) \leq g(x)$  per ogni  $x \in [a, b]$ ; consideriamo il seguente insieme, detto *dominio normale* rispetto all'asse  $\vec{x}$ ,

$$D = \{(x, y) : x \in [a, b], f(x) \leq y \leq g(x)\}.$$

Provare che  $D$  è misurabile secondo Peano-Jordan e che

$$m(D) = \int_a^b (g(x) - f(x))dx. \blacksquare$$

**Esercizio 5.5.** Illustrare il risultato dell'Esercizio 4.6 alla luce del significato geometrico dell'integrale di Riemann.■

§6. Le Formule di Wallis e di Stirling.

Usiamo la integrazione definita per ricavare le seguenti formule

$$\sqrt{\pi} = \lim_k \frac{1}{k} \frac{(2k)!!}{\sqrt{k} (2k-1)!!} \quad (\text{Formula di Wallis}) \quad (6.1)$$

$$\lim_n \frac{n!e^n}{n^n \sqrt{n}} = \sqrt{2\pi} \quad (\text{Formula di Stirling}) \quad (6.2).$$

Proviamo dapprima la (6.1). Osserviamo, intanto, che da  $0 \leq \sin t \leq 1$  per  $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$  e  $0 < \sin t < 1$  per  $t \in ]0, \frac{\pi}{2}[$  segue che

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k+1} t dt < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k} t dt < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k-1} t dt \quad \forall k \in \mathbb{N}, k \geq 1.$$

Notiamo adesso che

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m t dt = \begin{cases} \frac{(m-1)!!}{m!!} \frac{\pi}{2} & \text{se } m \text{ è pari} \\ \frac{(m-1)!!}{m!!} & \text{se } m \text{ è dispari} \end{cases}$$

(la dimostrazione viene lasciata al lettore; suggerimento: si veda il Capitolo 12); pertanto, si ha

$$\frac{(2k)!!}{(2k+1)!!} < \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \frac{\pi}{2} < \frac{(2k-2)!!}{(2k-1)!!}$$

da cui, moltiplicando per  $\frac{(2k-1)!!}{(2k-2)!!}$ , segue

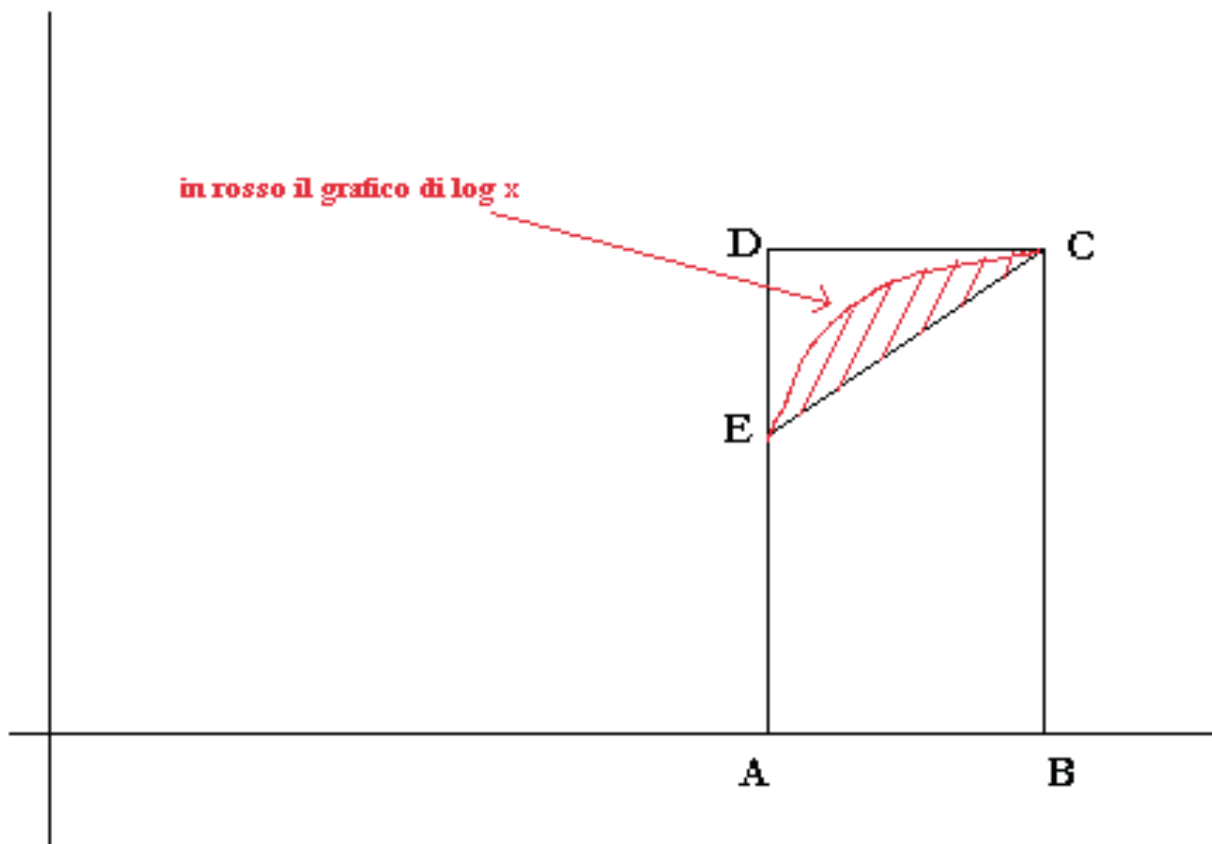
$$\frac{2k}{2k+1} < \left[ \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \right]^2 k\pi < 1;$$

estraendo la radice quadrata di ogni membro otteniamo

$$\sqrt{\frac{2k}{2k+1}} < \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \sqrt{k\pi} < 1 \tag{6.3}$$

Passando al limite per  $k \rightarrow \infty$  nella (6.3), si ottiene la tesi (6.1) grazie a noti teoremi sui limiti di successioni. ■

Proviamo adesso la (6.2). Fissato  $p \in \mathbb{N}, p \geq 1$ , consideriamo il rettangolo  $\mathcal{Q}$  di vertici  $A = (p, 0), B = (p+1, 0), C = (p+1, \ln(p+1)), D = (p, \ln(p+1))$ . Si ha  $Area(\mathcal{Q}) = \ln(p+1)$ . Sia  $E = (p, \ln p)$  e siano  $\mathcal{T}$  il triangolo di vertici  $E, C, D$  ed  $\mathcal{R}$  il trapezio di vertici  $A, B, C, E$ . Allora si ha  $Area(\mathcal{T}) = \frac{\ln(p+1) - \ln p}{2}$  e  $Area(\mathcal{R}) = \int_p^{p+1} \ln x dx - \epsilon_p$  (si utilizzi anche il significato geometrico dell'integrale di Riemann) essendo  $\epsilon_p$  l'area della figura tratteggiata nel seguente disegno



Ovviamente,  $Area(\mathcal{Q}) = Area(\mathcal{T}) + Area(\mathcal{R})$ ; quindi

$$\ln(p+1) = \frac{\ln(p+1) - \ln p}{2} + \int_p^{p+1} \ln x dx - \epsilon_p \quad (6.4).$$

Calcolando l'integrale definito nella (6.4) segue che

$$\ln(p+1) = \frac{\ln(p+1)}{2} - \frac{\ln p}{2} + (p+1) \ln(p+1) - p \ln p - 1 - \epsilon_p$$

da cui deriva che

$$\epsilon_p = \frac{\ln(p+1)}{2} - \frac{\ln p}{2} + (p+1) \ln(p+1) - p \ln p - 1 - \ln(p+1) =$$

$$-\frac{\ln(p+1)}{2} - \frac{\ln p}{2} + (p+1) \ln(p+1) - p \ln p - 1 =$$

$$\left(p + \frac{1}{2}\right) \ln(p+1) - \left(p + \frac{1}{2}\right) \ln p - 1 = \left(p + \frac{1}{2}\right) \ln\left(1 + \frac{1}{p}\right) - 1.$$

Proviamo adesso che la serie  $\sum \epsilon_p$ , a termini positivi, converge, osservando che  $\epsilon_p$  è infinitesimo del secondo ordine rispetto all'infinitesimo  $\frac{1}{p}$ ; proveremo, a tal fine, che

$$\lim_p p^2 \epsilon_p = \lim_p p^2 \left[ \left(p + \frac{1}{2}\right) \ln\left(1 + \frac{1}{p}\right) - 1 \right] = \frac{1}{12} \quad (6.5);$$

la relazione di limite (6.5) sarà provata una volta dimostrato che

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\left(\frac{1}{t} + \frac{1}{2}\right) \ln(1+t) - 1}{t^2} = \frac{1}{12} \quad (6.6),$$

poiché sarà allora sufficiente applicare il Teorema sul Limite di una Funzione Composta (Capitolo 8) dove si pone  $t = \frac{1}{p}$  e si ha  $\lim_p \frac{1}{p} = 0^+$ ; abbiamo

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\left(\frac{1}{t} + \frac{1}{2}\right) \ln(1+t) - 1}{t^2} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\left(1 + \frac{t}{2}\right) \ln(1+t) - t}{t^3} =$$

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{2} \ln(1+t) + \frac{1+\frac{t}{2}}{1+t} - 1}{3t^2} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{2(1+t)} - \frac{1}{2(1+t)^2}}{6t} =$$

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t}{12t(1+t)^2} = \frac{1}{12}$$

dove si è fatto uso due volte del Teorema di De L'Hopital (forma  $\frac{0}{0}$ ) per giustificare il secondo e terzo segno di " = "; la (6.6) è allora provata e con essa, come detto sopra, la (6.5). Riconsideriamo adesso la (6.4), la scriviamo per  $p = 1, 2, \dots, n - 1$  e sommiamo membro a membro le uguaglianze ottenute, ricavando

$$\begin{aligned} \ln(n!) &= \frac{\ln n}{2} + \int_1^n \ln x dx - \sum_{p=1}^n \epsilon_p = \\ &= \frac{\ln n}{2} + n \ln n - n + 1 - \sum_{p=1}^n \epsilon_p; \end{aligned}$$

ne viene che

$$\ln \frac{n!e^n}{n^n \sqrt{n}} = 1 - \sum_{p=1}^n \epsilon_p.$$

Avendo già osservato che la serie  $\sum_{p=1}^n \epsilon_p$  converge, possiamo concludere che esiste finito il limite della successione

$$\left( \ln \frac{n!e^n}{n^n \sqrt{n}} \right)_{n \in \mathbb{N}};$$

posto  $x_n = \frac{n!e^n}{n^n \sqrt{n}}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , possiamo dire che  $(x_n)$  converge e che il suo limite  $x_0$  è diverso da zero; dalla Formula di Wallis, poiché  $(2n)!! = 2^n n!$ ,  $(2n)! = (2n)!!(2n-1)!!$ , ricaviamo che

$$\sqrt{\pi} = \lim_n \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{2^{2n} (n!)^2}{(2n)!}.$$

Ricavando  $n!$  e  $(2n)!$  dalle espressioni di  $x_n$  e  $x_{2n}$  otteniamo

$$n! = \frac{x_n n^n \sqrt{n}}{e^n}, \quad (2n)! = \frac{x_{2n} 2^{2n} n^{2n} \sqrt{2n}}{e^{2n}}$$

e quindi

$$\sqrt{\pi} = \lim_n \frac{2^{2n} (x_n n^n \sqrt{n} e^{-n})^2}{\sqrt{n} x_{2n} (2n)^{2n} \sqrt{2n} e^{-2n}} = \frac{1}{\sqrt{2}} x_0$$

da cui

$$x_0 = \sqrt{2\pi}$$

e quindi la (6.2). ■

### §7. Irrazionalità di $\pi$ .

Utilizziamo l'integrale di Riemann per dimostrare che  $\pi$  è un numero irrazionale (la dimostrazione che qui di seguito presentiamo è dovuta a I. Niven). Per assurdo sia  $\pi = \frac{a}{b}$ ,  $a, b \in \mathbb{N}$ ,  $b \neq 0$ . Consideriamo il polinomio  $P(x) = \frac{x^n(a-bx)^n}{n!}$ , essendo  $n \in \mathbb{N}$  tale che  $\frac{\pi^{n+1}a^n}{4^n n!} < 1$ , e quindi il polinomio

$$Q(x) = P(x) - P''(x) + P^{(4)}(x) - \dots + (-1)^n P^{(2n)}(x).$$

Facendo uso della Formula di Leibnitz per il calcolo della derivata h-esima di un prodotto otteniamo che

$$(D^{(h)}P)(x) = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^h \binom{h}{k} D^{(k)}[x^n] D^{(h-k)}[(a-bx)^n] \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

dove

$$D^{(h)}[x^n] = \begin{cases} x^n & h = 0 \\ n(n-1)\dots(n-h+1)x^{n-h} & 0 < h < n \\ n! & h = n \\ 0 & h > n \end{cases}$$

ne segue che

$$(D^{(h)}P)(x) = \frac{1}{n!} \left[ x^n + \sum_{k=1}^h \binom{h}{k} n(n-1)\dots(n-k+1)x^{n-k} D^{(h-k)}[(a-bx)^n] \right] \quad \text{se } 0 < h < n,$$

$$(D^{(h)}P)(x) = \frac{1}{n!} \left[ x^n + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{h}{k} n(n-1)\dots(n-k+1)x^{n-k} D^{(h-k)}[(a-bx)^n] + n! D^{(h-n)}[(a-bx)^n] \right] \quad \text{se } h \geq n$$

e quindi che  $(D^{(h)}P)(0) = 0$ , per ogni  $h = 0, 1, 2, \dots, n-1$ , mentre  $(D^{(h)}P)(0) \in \mathbb{N}$  se  $h = n, n+1, \dots, 2n$ . Poiché  $P(x) = P(\pi - x)$  (la dimostrazione viene lasciata al lettore) si ha che  $(D^{(h)}P)(x) = (-1)^h (D^{(h)}P)(\pi - x)$  per ogni  $x \in \mathbb{R}$ , da cui deriva che anche  $(D^{(h)}P)(\pi) = 0$ , per ogni  $h = 0, 1, 2, \dots, n-1$ , mentre  $(D^{(h)}P)(\pi) \in \mathbb{N}$  se  $h = n, n+1, \dots, 2n$ ,  $h$  pari. Da quanto detto segue che  $Q(0) \in \mathbb{Z}$ ,  $Q(\pi) \in \mathbb{Z}$ . Inoltre, si ha (la dimostrazione viene lasciata al lettore)  $Q'(x) = P(x) - Q(x)$  in  $\mathbb{R}$  e quindi

$$\frac{d}{dx} \{Q'(x) \sin x - Q(x) \cos x\} = P(x) \sin x$$

da cui segue che

$$\int_0^\pi P(x) \sin x dx = [Q'(x) \sin x - Q(x) \cos x]_0^\pi = Q(\pi) + Q(0) \in \mathbb{Z}.$$

Osserviamo adesso che  $P(x)$  ha un massimo per  $x = \frac{\pi}{2}$  e dunque, per  $x \in ]0, \pi[$  si ha  $0 < P(x) < \frac{\pi^n a^n}{4^n n!}$  da cui segue

$$0 < \int_0^\pi P(x) \sin x dx < \frac{\pi^{n+1} a^n}{4^n n!} < 1$$

fatto che contrasta con quanto provato prima (cioè che  $\int_0^\pi P(x) \sin x dx \in \mathbb{Z}$ ); la dimostrazione è conclusa. ■

### §8. Il Teorema di Lebesgue-Vitali.

In questo paragrafo finale vogliamo dimostrare un importante risultato, dovuto a Lebesgue e Vitali, che serve a caratterizzare la classe delle funzioni integrabili secondo Riemann; per far ciò occorre introdurre la nozione di insiemi misurabili secondo Lebesgue (più generale di quella dovuta a Peano-Jordan); non daremo la definizione completa nè studieremo qui tale famiglia di insiemi, alla quale sarà dedicato il Capitolo 30, ma enunceremo solo le definizioni strettamente necessarie ai nostri scopi.

**Definizione 8.1.** *Per convenzione, l'insieme vuoto è un insieme misurabile secondo Lebesgue con misura nulla. Dato un rettangolo di  $\mathbb{R}$  (cioè un intervallo chiuso di  $\mathbb{R}$ ) o un plurirettangolo di  $\mathbb{R}$  (cioè l'unione di un numero finito di rettangoli di  $\mathbb{R}$  a due a due privi di punti interni comuni) diremo che essi sono misurabili secondo Lebesgue con misura uguale alla misura elementare (o di Peano-Jordan). Dato un insieme aperto limitato non vuoto  $A \subset \mathbb{R}$  diremo che esso è misurabile secondo Lebesgue e porremo  $m(A) = \sup\{m(P) : P \text{ plurirettangolo contenuto in } A\}$ . Dato un arbitrario insieme  $B \subset \mathbb{R}$  limitato e non vuoto, diremo che esso è misurabile secondo Lebesgue con misura nulla se l'estremo inferiore delle misure (secondo Lebesgue) degli aperti non limitati che lo contengono è zero.*

Dalla definizione segue che se  $B$  è un insieme limitato di misura nulla secondo Lebesgue, allora per ogni  $\epsilon > 0$  esiste un aperto limitato  $A$  contenente  $B$  con  $m(A) < \epsilon$ ; poiché ogni aperto di  $\mathbb{R}$  è unione finita o numerabile di intervalli aperti a due a due disgiunti (si veda il Capitolo 5), possiamo dire che se  $B$  è un insieme limitato di misura nulla secondo Lebesgue, allora per ogni  $\epsilon > 0$  esistono un numero finito o una infinità numerabile di intervalli aperti a due a due disgiunti  $I_j$  tali che  $B \subset \cup I_j$  e  $\sum m(I_j) < \epsilon$ . Si noti anche che se  $B$  è un insieme non vuoto e limitato, tale che per ogni  $\epsilon > 0$  esistono un numero finito o una infinità numerabile di intervalli aperti a due a due disgiunti  $I_j$  tali che  $B \subset \cup I_j$  e  $\sum m(I_j) < \epsilon$ , allora  $B$  è misurabile secondo Lebesgue ed ha misura nulla.

**Esercizio 8.1.** Provare che se un insieme è misurabile secondo Peano-Jordan ed ha misura nulla, allora è misurabile secondo Lebesgue ed ha misura nulla. Dimostrare che vale il viceversa oppure portare un esempio di insieme misurabile secondo Lebesgue con misura nulla, ma non misurabile secondo Peano-Jordan. ■

**Esercizio 8.2.** Dimostrare che ogni sottoinsieme di un insieme misurabile secondo Lebesgue di misura nulla è anch'esso misurabile secondo Lebesgue con misura nulla e che l'unione numerabile di insiemi misurabili secondo Lebesgue di misura nulla è anch'essa misurabile secondo Lebesgue con misura nulla.■

**Definizione 8.2.** Sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  limitata. Per ogni  $x \in [a, b]$  e  $\rho > 0$ , poniamo  $\omega_f(x, \rho) = \sup_{]x-\rho, x+\rho[} f - \inf_{]x-\rho, x+\rho[} f$  (oscillazione di  $f$  in  $]x - \rho, x + \rho[$ ); poiché  $\omega_f(x, \rho)$  è funzione non negativa e non crescente rispetto a  $\rho \in ]0, +\infty[$ , esiste finito il  $\lim_{\rho \rightarrow 0^+} \omega_f(x, \rho)$  che denoteremo con  $\omega_f(x)$  e chiameremo oscillazione di  $f$  in  $x$ .

**Esercizio 8.3.** Dimostrare che  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , limitata, è continua in  $x \in [a, b]$  se e solo se  $\omega_f(x) = 0$ .■

Prima di dimostrare l'annunciata caratterizzazione delle funzioni integrabili secondo Riemann, proviamo due risultati preliminari

**Lemma 8.1.** Sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  limitata. Sia  $\delta > 0$ . Allora, l'insieme  $A_\delta = \{x : x \in [a, b], \omega_f(x) \geq \delta\}$  è chiuso in  $\mathbb{R}$ .

Dimostrazione. Sia  $x \in DA_\delta$ . Dato  $\epsilon > 0$ , nell'intervallo  $I_\epsilon = ]x - \epsilon, x + \epsilon[$  esiste  $y \in A_\delta$  e quindi esiste  $\rho > 0$  tale che  $]y - \rho, y + \rho[ \subset ]x - \epsilon, x + \epsilon[$ ; ne viene che  $\omega_f(y, \rho) \leq \omega_f(x, \epsilon)$ ; poiché  $\delta \leq \omega_f(y) \leq \omega_f(y, \rho)$  per ogni  $\rho \in ]0, +\infty[$ , ricaviamo che  $\delta \leq \omega_f(x, \epsilon)$  per ogni  $\epsilon \in ]0, +\infty[$ , fatto da cui segue facilmente che  $\omega_f(x) \geq \delta$  e quindi la tesi.■

**Lemma 8.2.** Sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  limitata. Se  $\delta > 0$  e  $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$  sono tali che  $\omega_f(x) < \delta$  per ogni  $x \in [\alpha, \beta]$ , allora esiste una decomposizione  $D$  di  $[\alpha, \beta]$  tale che  $S_D - s_D < \delta(\beta - \alpha)$ .

Dimostrazione. Per ogni  $x \in [\alpha, \beta]$  si ha  $\omega_f(x) < \delta$ ; esiste allora  $I_x$  intervallo aperto di centro  $x$  tale che  $x \in I_x$  e  $\sup_{\overline{I_x}} f - \inf_{\overline{I_x}} f < \delta$ . Tale famiglia di intervalli costituisce un ricoprimento di aperti per  $[\alpha, \beta]$ , che è chiuso e limitato; il Teorema di Borel-Heine assicura che esistono un numero finito di punti  $x_1, x_2, \dots, x_p \in [\alpha, \beta]$  tali che  $[\alpha, \beta] \subset \cup_{i=1}^p I_{x_i}$ . Consideriamo la decomposizione  $D$  di  $[\alpha, \beta]$  determinata dai punti  $\alpha, \beta$  e dagli estremi degli intervalli  $I_{x_i}, i = 1, 2, \dots, p$ , che si trovano in  $[\alpha, \beta]$ ; se denotiamo con  $J_1, J_2, \dots, J_q$  gli intervalli chiusi in cui  $[\alpha, \beta]$  viene diviso dai punti di  $D$ , otteniamo

$$S_D - s_D = \sum_{i=1}^q (\sup_{J_i} f - \inf_{J_i} f) m(J_i) < \delta(\beta - \alpha). \blacksquare$$

Possiamo, adesso, provare il risultato principale di questo paragrafo

**Teorema di Lebesgue-Vitali.** Sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  limitata. Allora,  $f$  è integrabile secondo Riemann se e solo se l'insieme  $A$  dei suoi punti di discontinuità è un insieme misurabile secondo Lebesgue con misura nulla.

Dimostrazione. Supponiamo, innanzitutto, che  $f$  sia integrabile secondo Riemann. Se  $A = \emptyset$  abbiamo la tesi. Altrimenti, sia  $A \neq \emptyset$ ; allora  $A = \{x : x \in [a, b], \omega_f(x) > 0\} = \cup_{n \in \mathbb{N}} \{x : x \in [a, b], \omega_f(x) \geq \frac{1}{n}\}$ ; posto  $A_n = \{x : x \in [a, b], \omega_f(x) \geq \frac{1}{n}\}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , per acquisire la tesi sarà sufficiente provare che ogni  $A_n$  è misurabile con misura nulla. Dalla integrabilità di  $f$  segue che per ogni  $\epsilon > 0$  esiste una decomposizione  $D_\epsilon$  di  $[a, b]$  tale che  $S_{D_\epsilon} - s_{D_\epsilon} < \frac{\epsilon}{2n}$ , con  $D_\epsilon = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_m < x_{m+1} = b\}$  e  $I_j = [x_j, x_{j+1}]$ ,  $j = 0, 1, 2, \dots, m$ ; allora,  $A_n = (A_n \cap D_\epsilon) \cup (A_n \setminus D_\epsilon)$  dove  $A_n \cap D_\epsilon$  è finito, cosicché esistono un numero finito di intervalli chiusi  $J_1, J_2, \dots, J_k$  tali che  $A_n \cap D_\epsilon \subset \cup_{i=1}^k J_i$  e  $\sum_{i=1}^k m(J_i) < \frac{\epsilon}{2}$ . Se, invece,  $x \in A_n \setminus D_\epsilon$  esiste  $I_j$  tale che  $x \in I_j$  e quindi  $\sup_{I_j} f - \inf_{I_j} f \geq \omega_f(x) \geq \frac{1}{n}$ . Se  $I_{k_1}, I_{k_2}, \dots, I_{k_r}$  sono gli intervalli che ricoprono  $A_n \setminus D_\epsilon$  si ha

$$\sum_{p=1}^r \frac{m(I_{k_p})}{n} \leq \sum_{p=1}^r (\sup_{I_{k_p}} f - \inf_{I_{k_p}} f) m(I_{k_p}) \leq S_{D_\epsilon} - s_{D_\epsilon} < \frac{\epsilon}{2n} \Rightarrow \sum_{p=1}^r m(I_{k_p}) < \frac{\epsilon}{2}.$$

Ne viene che

$$A_n \subset [\cup_{s=1}^k J_s] \cup [\cup_{p=1}^r J_{k_p}] \quad \text{con} \quad \sum_{s=1}^k m(J_s) + \sum_{p=1}^r m(J_{k_p}) < \epsilon$$

e quindi che  $m(A_n) = 0$ .

Viceversa, supponiamo che  $f$  sia limitata (e non costante, altrimenti non vi è nulla da provare) e che l'insieme dei suoi punti di discontinuità abbia misura nulla secondo Lebesgue. Sia  $\epsilon > 0$  e sia  $n \in \mathbb{N}$  tale che  $\frac{b-a}{n} < \frac{\epsilon}{2}$ ; consideriamo, poi,  $A_n = \{x : x \in [a, b], \omega_f(x) \geq \frac{1}{n}\} \subset A$ , cosicché  $A_n$  è misurabile secondo Lebesgue con misura nulla. Esistono allora un numero finito od una infinità numerabile di intervalli aperti  $I_h$ , a due a due disgiunti, che ricoprono  $A_n$  e con  $\sum m(I_h) < \frac{\epsilon}{2(\sup_{[a,b]} f - \inf_{[a,b]} f)}$ . Poiché  $A_n$  è chiuso (Lemma 8.1), esistono un numero finito  $I_{h_1}, I_{h_2}, \dots, I_{h_p}$ , di tali intervalli aperti che ricoprono  $A_n$  (Teorema di Borel-Heine). L'insieme  $[a, b] \setminus (\cup_{i=1}^p I_{h_i})$  è allora unione di un numero finito di intervalli chiusi  $J_1, J_2, \dots, J_q$  e quindi  $[a, b] = (\cup_{i=1}^p (I_{h_i} \cap [a, b])) \cup (\cup_{s=1}^q J_s)$  con  $J_s \cap A_n = \emptyset$  per ogni  $s = 1, 2, \dots, q$ . Per il Lemma 8.2 esiste una decomposizione  $D_s$  di  $J_s$  tale che  $S_{D_s} - s_{D_s} < \frac{m(J_s)}{n}$ ; sia, adesso,  $D$  la decomposizione di  $[a, b]$  ottenuta considerando gli elementi di ogni  $D_s$  e gli estremi di ogni  $I_{h_i} \cap [a, b]$ ,  $i = 1, 2, \dots, p$ ; otteniamo, così

$$S_D - s_D = \sum_{s=1}^q (S_{D_s} - s_{D_s}) + \sum_{i=1}^p (\sup_{I_{h_i}} f - \inf_{I_{h_i}} f) m(I_{h_i} \cap [a, b]) < \frac{1}{n} \sum_{s=1}^q m(J_s) + (\sup_{[a,b]} f - \inf_{[a,b]} f) \sum_{i=1}^p m(I_{h_i}) < \frac{b-a}{n} + \frac{\epsilon}{2} < \epsilon.$$

Dal Criterio di integrabilità di Riemann segue la tesi. ■

**Esercizio 8.4.** Ridimostrare le proprietà dell'integrale di Riemann facendo uso della caratterizzazione delle

funzioni integrabili secondo Riemann contenuta nel Teorema di Lebesgue-Vitali.■