

SERIE NUMERICHE

È già noto al lettore come si possano sommare un numero finito di numeri reali o complessi; accade, a volte, di dover “sommare” infiniti numeri reali o complessi; per poter definire una tale nuova operazione è stato introdotto, dai matematici, l’importante concetto di serie numerica. Questo capitolo è dedicato allo studio della teoria delle serie di numeri reali o complessi.

§1. Il carattere di una serie.

Sia $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di numeri reali o complessi; se volessimo sommare tutti i numeri di tale successione la maniera più naturale di procedere per introdurre questa nuova operazione sarebbe quella di sommare i primi due elementi, quindi di aggiungere alla loro somma il terzo elemento, quindi di aggiungere alla somma dei primi tre elementi il quarto elemento, e così via, cercando di capire il comportamento di queste somme man mano che aumenta il numero degli elementi considerati. Questo procedimento empirico viene fissato nella seguente definizione

Definizione 1.1. Sia $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di numeri reali o complessi (si noti che è possibile che tale successione non sia definita per alcuni valori di n , ma deve esserlo da un certo posto in poi); indichiamo con s_n la somma dei primi $n + 1$ elementi della successione, cioè $s_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n$, definendo così un’altra successione $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$, detta successione delle somme parziali. La coppia di successioni $[(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (s_n)_{n \in \mathbb{N}}]$ si chiama serie numerica; per brevità, d’ora in poi, una serie sarà denotata con il simbolo

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

Se la successione $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge ad un numero S , diremo che la serie converge ed ha per somma S e scriveremo

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = S.$$

Se la successione $(s_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ diverge, diremo che la serie diverge e scriveremo

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \infty.$$

Se la successione $(s_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ diverge positivamente (risp. negativamente), diremo che la serie diverge positivamente (risp. negativamente) e scriveremo

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = +\infty \quad \left(\text{risp.} \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n = -\infty \right).$$

Se una serie converge o diverge essa viene detta regolare o determinata; in caso contrario si dice irregolare o indeterminata.

Studiare il *carattere* di una serie vuol dire cercare di determinare se la serie converge, possibilmente calcolandone la somma, o diverge o è indeterminata; a_n viene detto termine generale della serie.

Presentiamo, adesso, esempi di studio di serie, alcuni di fondamentale importanza

Esempio 1.1. Sia $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione costante. È facile vedere che la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge se e solo se ogni a_n vale zero (nel qual caso la somma della serie è zero), altrimenti diverge (positivamente o negativamente, a seconda del segno di a_n).■

Esempio 1.2. Data $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ consideriamo la serie, detta *serie telescopica*, seguente

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n - a_{n+1})$$

la cui successione delle somme parziali ha il seguente termine generale $s_n = a_0 - a_{n+1}$; infatti si ha $s_n = (a_0 - a_1) + (a_1 - a_2) + \dots + (a_n - a_{n+1}) = a_0 - a_{n+1}$, per ogni $n \in \mathbb{N}$; quindi il carattere di una tale serie è perfettamente determinato da quello della successione $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$; nel caso in cui tale successione converga, la somma della serie è, ovviamente, $a_0 - \lim_n a_n$.

La serie (di Mengoli) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ è un esempio di serie telescopica, poiché $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ (quindi $a_n = \frac{1}{n}$ per $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$), che risulta convergente, poiché $\lim_n a_n = 0$, ed ha per somma 1.

Anche l'esame del carattere della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{n}}$ può essere svolto ricorrendo all'idea che sta alla base dello studio delle serie telescopiche; infatti, si ha (con $p \in \mathbb{N}$)

$$\sum_{n=1}^p \frac{1}{2\sqrt{n}} \geq \sum_{n=1}^p \frac{(n+1) - n}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} = \sum_{n=1}^p [\sqrt{n+1} - \sqrt{n}] = \sqrt{p+1} - 1 \xrightarrow{p \rightarrow \infty} +\infty. \blacksquare$$

Esempio 1.3. Si studi il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 5n + 3}{n(n+1)(n+2)(n+3)}.$$

Dalla Teoria dei Polinomi sappiamo che la funzione $\frac{x^2+5x+3}{x(x+1)(x+2)(x+3)}$ può essere decomposta in fratti semplici come segue

$$\frac{x^2 + 5x + 3}{x(x+1)(x+2)(x+3)} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} - \frac{3}{x+2} + \frac{1}{x+3} \right] \quad \forall x \in \mathbb{R}, x \neq 0, -1, -2, -3.$$

Segue da ciò che il generico elemento della successione delle somme parziali della serie data è

$$s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \left[\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} - \frac{3}{k+2} + \frac{1}{k+3} \right] \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1.$$

Tale elemento può essere scritto come segue

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2} \right) + \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right) + \left(\frac{1}{k+3} - \frac{1}{k+2} \right) \right] = \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) + \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right) + \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right) + \left(\frac{1}{k+3} - \frac{1}{k+2} \right) \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{1}{n+1} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} \right) + \left(\frac{1}{n+3} - \frac{1}{3} \right) \right] \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1. \end{aligned}$$

La serie assegnata risulta allora convergente con somma $\frac{5}{6}$. ■

Esempio 1.4. Consideriamo la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a q^n$, detta *serie geometrica* di ragione q (supponiamo $q \neq 1$, altrimenti ricadiamo nel caso descritto nell'Esempio 1.1); dal Capitolo sulle Successioni Numeriche sappiamo che il generico termine della successione delle somme parziali è $s_n = a \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ ed anche che tale successione converge se e solo se $|q| < 1$ con limite $\frac{a}{1-q}$; possiamo concludere che la serie geometrica converge se e solo se la sua ragione verifica la condizione $|q| < 1$, nel qual caso la somma della serie è il numero $\frac{a}{1-q}$; se, invece, $a, q \in \mathbb{R}, q > 1$, la serie diverge positivamente se $a > 0$, negativamente se $a < 0$, mentre è indeterminata se $a, q \in \mathbb{R}, a \neq 0, q \leq -1$. ■

Esempio facoltativo. Vediamo come la serie geometrica può essere usata per trovare la frazione generatrice di un numero reale decimale infinito periodico con periodo non uguale a 9. Sia $\alpha = a_0, a_1 a_2 \dots a_p \overline{a_{p+1} a_{p+2} \dots a_{p+n}}$ il numero in esame; è noto che α è il limite, per $h \rightarrow \infty$, della successione $(\alpha_h)_{h=1}^{\infty}$ dove

$$\alpha_h = a_0, a_1 a_2 \dots a_p \underbrace{a_{p+1} a_{p+2} \dots a_{p+n} a_{p+1} a_{p+2} \dots a_{p+n} \dots a_{p+1} a_{p+2} \dots a_{p+n}}_{h \text{ "blocchi" } a_{p+1} a_{p+2} \dots a_{p+n}},$$

per ogni $h \in \mathbb{N}, h \geq 1$. D'altra parte

$$\alpha_h = \frac{a_0 a_1 a_2 \dots a_p}{10^p} + \frac{a_{p+1} a_{p+2} \dots a_{p+n}}{10^{p+n}} + \frac{a_{p+1} a_{p+2} \dots a_{p+n}}{10^{p+2n}} + \dots + \frac{a_{p+1} a_{p+2} \dots a_{p+n}}{10^{p+hn}};$$

quindi $\alpha_h - \frac{a_0 a_1 a_2 \dots a_p}{10^p}$ è il termine generale della successione delle somme parziali di una serie geometrica di ragione $\frac{1}{10^n}$; tale serie deve quindi convergere e, dopo aver fatto tendere h ad ∞ , deve aversi

$$\alpha - \frac{a_0 a_1 a_2 \dots a_p}{10^p} = \frac{a_{p+1} a_{p+2} \dots a_{p+n}}{10^{p+n}} \frac{1}{1 - \frac{1}{10^n}}$$

da cui segue che

$$\alpha = \frac{a_0 a_1 a_2 \dots a_p}{10^p} + \frac{a_{p+1} a_{p+2} \dots a_{p+n}}{10^p} \frac{1}{10^n - 1} =$$

$$\frac{a_0 a_1 a_2 \dots a_p (10^n - 1) + a_{p+1} a_{p+2} \dots a_{p+n}}{(10^n - 1) \times 10^p} = \frac{a_0 a_1 a_2 \dots a_p a_{p+1} a_{p+2} \dots a_{p+n} - a_0 a_1 a_2 \dots a_p}{\underbrace{99 \dots 9}_{n \text{ volte}} \times 10^p}$$

che è la nota formula che dà la frazione generatrice. ■

In maniera analoga (la dimostrazione viene lasciata al lettore) si può giustificare la seguente convenzione: *dato un numero decimale periodico di periodo 9, conveniamo di considerarlo uguale al numero decimale finito ottenuto eliminando il periodo ed aggiungendo una unità alla cifra che precede il periodo.* ■

Esempio 1.5. Consideriamo la serie seguente $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, detta *serie armonica*. Per studiarne il carattere ricordiamo che si ha $(1 + \frac{1}{n})^n < e$, per ogni $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$; ne segue che

$$\log \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 1 \Rightarrow \log \left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1;$$

possiamo così scrivere che

$$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} > \log 2 + \log \frac{3}{2} + \dots + \log \frac{n+1}{n} = \log(n+1) \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1;$$

poiché $\lim_n \log(n+1) = +\infty$, anche $\lim_n s_n = +\infty$; la serie armonica risulta, allora, divergente positivamente. ■

Dal momento che il carattere di una serie dipende da quello della successione delle sue somme parziali è lecito attendersi che i risultati sulle successioni numeriche possano avere importanti conseguenze per lo studio delle serie; questo è in effetti vero come si vedrà nel seguito. Ragionando sulla idea intuitiva di serie convergente si è portati a pensare che affinché una serie converga deve necessariamente accadere che i suoi termini devono, definitivamente, essere “piccoli”; ma un attento esame dell’Esempio 1.5 rivela che ciò, anche se necessario per la convergenza di una serie, non è sufficiente, poiché, sebbene ogni termine della serie possa essere definitivamente “piccolo”, considerando un “gruppo” di termini consecutivi della serie la somma di tale gruppo di termini può essere “grande”, di modo che, dovendo sommare infiniti gruppi di questo tipo, la somma finale della serie non sarà un numero (con gli stessi ragionamenti dell’Esempio 1.5 il lettore dimostri che $\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n} > \log 2$, per ogni $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$); quanto qui osservato in maniera intuitiva è il contenuto del seguente

Criterio di Cauchy. *Sia data una serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$. Essa converge se e solo se vale la seguente Condizione di Cauchy*

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \nu \in \mathbb{N} \quad \text{tale che} \quad \forall n \in \mathbb{N}, n > \nu, p \in \mathbb{N} \quad \text{risulta} \quad |a_n + a_{n+1} + \dots + a_{n+p}| < \epsilon. \quad \blacksquare$$

Sappiamo già che la serie armonica non converge e quindi essa non può verificare la Condizione di Cauchy, come in realtà osservato prima dell'enunciazione del Criterio di Cauchy; è possibile dimostrare anche in altro modo che la Condizione di Cauchy non è soddisfatta dalla serie armonica; infatti siano $\epsilon = \frac{1}{2}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, e $p = n$; si ha

$$\left| \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \right| > \underbrace{\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \dots + \frac{1}{2n}}_{n \text{ volte}} = \frac{1}{2} = \epsilon$$

che è quanto volevamo. In questo modo abbiamo ottenuto un'altra prova della non convergenza della serie armonica. ■

Una importante conseguenza è la seguente condizione necessaria per la convergenza di dimostrazione immediata, che viene pertanto lasciata al lettore

Corollario 1.2. *Sia data una serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$. Essa converge solo se $\lim_n a_n = 0$.*

Ribadiamo che il precedente Corollario 1.2 è solo una condizione necessaria per la convergenza come dimostra l'Esempio 1.5; infatti la serie ivi considerata diverge anche se il suo termine generale è infinitesimo.

Esercizio 1.2. Data una serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ e fissato $k \in \mathbb{N}$, si chiama *serie resto k -esimo* la serie $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$, che viene usualmente denotata con R_k . Provare che $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge (risp. diverge o è indeterminata) se e solo se esiste una serie resto che converge (risp. diverge o è indeterminata) se e solo se ogni serie resto converge (risp. diverge o è indeterminata). Dimostrare, poi, che una serie converge se e solo se $\lim_k R_k = 0$. ■

Esercizio 1.3. Provare che il carattere di una serie non si altera se si cambiano un numero finito di termini della serie. ■

I risultati contenuti nella successiva Proposizione 1.3 sono immediati dalla Definizione 1.1 e da noti risultati sulle successioni numeriche

Proposizione 1.3. *Siano date due serie numeriche $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ e due numeri $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Si hanno i seguenti risultati*

- i) se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = A$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = B$ allora $\sum_{n=0}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n)$ converge con somma $\alpha A + \beta B$
- ii) se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ diverge, allora $\sum_{n=0}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n)$ converge se $\beta \neq 0$, diverge se $\beta = 0$
- iii) se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ è regolare e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ è indeterminata, allora $\sum_{n=0}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n)$ è indeterminata se $\beta \neq 0$
- iv) se $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ diverge positivamente (risp. negativamente), allora $\sum_{n=0}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n)$ diverge positivamente (risp. negativamente) se $\beta > 0$, diverge negativamente (risp. positivamente) se $\beta < 0$
- v) se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ divergono positivamente (risp. negativamente) e $\alpha\beta > 0$, allora $\sum_{n=0}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n)$

diverge positivamente (risp. negativamente) se $\alpha > 0$, mentre diverge negativamente (risp. positivamente) se $\alpha < 0$

vi) se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge positivamente, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ diverge negativamente e $\alpha\beta < 0$, allora $\sum_{n=0}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n)$ diverge positivamente se $\alpha > 0$, mentre diverge negativamente se $\alpha < 0$

vii) se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ divergono nulla si può dire sul carattere di $\sum_{n=0}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n)$ senza ulteriori ipotesi.

Osserviamo che la serie considerata nell'Esempio 1.3 può essere studiata attraverso la Proposizione 1.3 una volta che si osservi che essa può essere vista come combinazione lineare delle tre serie $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$, $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right)$, $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}\right)$.

§2. Serie a termini reali di segno costante.

In questo paragrafo fisseremo la nostra attenzione su una particolare classe di serie; analizzeremo dettagliatamente le serie a termini reali di segno costante poiché per esse sono stati ottenuti dai matematici tanti buoni teoremi, che non hanno senso per le serie a termini complessi; grazie alla Proposizione 1.3 possiamo studiare solo le serie a termini non negativi, cosa che faremo nel seguito. L'importanza delle serie a termini reali di segno costante è dovuta al fatto che esse sono sempre regolari

Teorema 2.1. *Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ una serie a termini non negativi. Allora essa converge oppure diverge positivamente.*

Dimostrazione. È facile vedere che la successione (s_n) delle somme parziali della serie è non decrescente; il Teorema sul Limite delle Successioni Monotone implica allora che essa converge oppure diverge positivamente. ■

Una prima conseguenza di tale risultato è la divergenza della serie armonica.

Altra fondamentale conseguenza della regolarità delle serie reali a termini di segno costante è il seguente importantissimo

Teorema di Confronto. *Siano $\sum_{n=0}^{\infty} a_n, \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ due serie a termini non negativi tali che esista $\nu \in \mathbb{N}$ per cui $a_n \leq b_n$, per ogni $n \in \mathbb{N}, n \geq \nu$. Allora,*

i) *se $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ converge, anche $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge*

ii) *se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge, anche $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ diverge.*

Dimostrazione. Consideriamo i resti n -esimi $A_\nu = \sum_{n=\nu}^{\infty} a_n, B_\nu = \sum_{n=\nu}^{\infty} b_n$; è noto che essi hanno lo stesso carattere delle serie di cui sono resti e poiché la successione delle somme parziali di A_ν è regolare ed è maggiorata termine a termine dalla successione delle somme parziali di B_ν che è regolare, la tesi segue dal Teorema di Confronto relativo alle successioni. ■

Osservazione 2.1. Notiamo che se, nel precedente Teorema di Confronto, $a_n \leq b_n$, per ogni $n \in \mathbb{N}$, allora (se $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ converge, anche $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge ed in più) la somma di $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ non supera quella di $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$. ■

Esempio 2.1. Si consideri la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}, \alpha > 0$, detta *serie armonica generalizzata*; poiché $\frac{1}{n^\alpha} > \frac{1}{n}$, per ogni $n \in \mathbb{N}$ ed $\alpha \leq 1$, dal Criterio del Confronto segue tale serie deve divergere positivamente per $\alpha \in]0, 1]$. ■

Notiamo che applicando alcuni dei risultati finora provati è possibile dimostrare che il numero "e" è un numero irrazionale.

Esempio 2.2. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge perché $\frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n(n+1)}$ per ogni $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$. In modo analogo si può provare che la serie armonica generalizzata $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ converge per $\alpha \geq 2$. ■

Il precedente Teorema di Confronto ha importanti, perché utili, corollari

Corollario 2.2. Siano $\sum_{n=0}^{\infty} a_n, \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ due serie a termini positivi tali che esista $\lim_n \frac{a_n}{b_n} = l > 0$. Allora le due serie hanno lo stesso carattere.

Dimostrazione. È sufficiente osservare che, fissato $\epsilon \in]0, l[$, si ha, definitivamente,

$$l - \epsilon < \frac{a_n}{b_n} < l + \epsilon \Leftrightarrow (l - \epsilon)b_n < a_n < b_n(l + \epsilon)$$

applicando quindi il Teorema di Confronto e la Proposizione 1.3. ■

La serie armonica generalizzata viene spesso usata come *serie campione* per applicare il Teorema di Confronto o qualcuno dei suoi Corollari, come possiamo vedere nell'Esempio 2.3 successivo

Esempio 2.3. Si studi la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\left[1 + \frac{1}{n} \right]^\alpha - 1 \right), \alpha \in]0, \infty[$.

Poiché, per uno dei limiti del capitolo sulle successioni, si ha

$$\lim_n \frac{\left[1 + \frac{1}{n} \right]^\alpha - 1}{\frac{1}{n}} = \alpha \neq 0$$

la serie data ha lo stesso carattere della serie armonica e quindi diverge, qualunque sia il valore di α . ■

Corollario 2.3. Siano $\sum_{n=0}^{\infty} a_n, \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ due serie a termini positivi tali che $\lim_n \frac{a_n}{b_n} = 0$. Allora valgono i seguenti fatti

i) se $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ converge, anche $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge

ii) se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge, anche $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ diverge.

Dimostrazione. È sufficiente osservare che, definitivamente, si ha

$$\frac{a_n}{b_n} < 1 \Leftrightarrow a_n < b_n$$

applicando quindi il Teorema di Confronto. ■

In maniera analoga si dimostra il

Corollario 2.4. Siano $\sum_{n=0}^{\infty} a_n, \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ due serie a termini positivi tali che $\lim_n \frac{a_n}{b_n} = +\infty$. Allora valgono i seguenti fatti

i) se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge, anche $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ converge

ii) se $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ diverge, anche $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge.

Infine, si ha la seguente conseguenza

Corollario 2.5. Siano $\sum_{n=0}^{\infty} a_n, \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ due serie a termini positivi tali che $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$, definitivamente.

Allora valgono i seguenti fatti

i) se $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ converge, anche $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge

ii) se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge, anche $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ diverge.

Sul Teorema di Confronto si basa la dimostrazione dei seguenti Criteri

Criterio del Rapporto (D'Alembert). Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ una serie a termini positivi. Supponiamo che esistano $\nu \in \mathbb{N}, K \in]0, 1[$ tali che $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq K$, per ogni $n \in \mathbb{N}, n \geq \nu$; allora, la serie converge. Se, invece, esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$, per ogni $n \in \mathbb{N}, n \geq \nu$, allora la serie diverge.

Dimostrazione. Dall'ipotesi $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq K$ per ogni $n \in \mathbb{N}, n \geq \nu$, segue che

$$a_{n+1} \leq K a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq \nu.$$

Procedendo per induzione è facile vedere (la dimostrazione viene lasciata al lettore) che

$$a_{n+1} \leq K^{n+1-\nu} a_\nu \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq \nu$$

disuguaglianza che significa che la serie data è maggiorata termine a termine definitivamente dalla serie di termine generale $K^{n+1-\nu} a_\nu$, che è una serie geometrica convergente perché con ragione $K \in]0, 1[$. Dal Teorema di Confronto segue la tesi, nel primo caso. Se, invece, esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ per ogni

$n \in \mathbb{N}, n \geq \nu$, allora la successione (a_n) è definitivamente non decrescente e quindi non può convergere a zero; allora, la serie non può convergere e deve necessariamente divergere. ■

Esempio 2.4. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ converge perché si ha $\frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{1}{2}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ (la dimostrazione viene lasciata al lettore). ■

Il Criterio di D'Alembert ha il seguente corollario

Corollario 2.6. Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ una serie a termini positivi. Si supponga che esista $L = \lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n}$

i) se $L < 1$, allora la serie converge

ii) se $L > 1$, allora la serie diverge.

Dimostrazione. Sotto l'ipotesi (i), dalla definizione di limite segue che per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < L + \epsilon \quad \forall n > \nu.$$

Poiché $L < 1$ possiamo scegliere $\epsilon \in]0, 1 - L[$ in modo che

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < L + \epsilon < 1 \quad \forall n > \nu.$$

La tesi segue allora dal Criterio del Rapporto. Sotto l'ipotesi (ii), dalla definizione di limite segue che per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > L - \epsilon \quad \forall n > \nu.$$

Poiché $L > 1$ possiamo scegliere $\epsilon \in]0, L - 1[$ in modo che

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > L - \epsilon > 1 \quad \forall n > \nu.$$

La tesi segue allora dal Criterio del Rapporto. ■

Esercizio 2.1. Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ una serie a termini positivi tale che esista $\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$; è possibile derivare da tale fatto informazioni sul carattere della serie? ■

Esempio 2.5. Proviamo che $\lim_n \frac{A^n}{n^b} = +\infty$, per ogni $A > 1, b > 0$, utilizzando tecniche differenti da quelle adoperate nel capitolo sulle successioni; consideriamo la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^b}{A^n}$; grazie al Corollario 2.6 è facile vedere (la dimostrazione viene lasciata al lettore) che essa converge; quindi per il Corollario 1.2 il suo termine generale è infinitesimo; ne segue facilmente l'asserto grazie ad una delle proprietà delle successioni. ■

Dall'esame di questo Esempio 2.5 si deduce che una (possibile) strada da seguire per provare che una successione (a_n) è infinitesima è quella di provare la convergenza della serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

Esercizio 2.2. Dire se la seguente affermazione è concettualmente corretta: “se $q \in]0, 1[$ la convergenza della serie geometrica di ragione q può essere stabilita solo attraverso l’uso del Corollario 2.6, cioè senza far uso del procedimento seguito nell’Esempio 1.4 o di altro procedimento”. ■

Esempio 2.6. Si studi la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} x^{2n}$, cercando di determinare i valori del parametro $x \in \mathbb{R}$ per i quali essa converge.

Notiamo che si ha convergenza per $x = 0$, mentre se $x \neq 0$ ogni termine della serie è positivo. Applichiamo, per $x \neq 0$, il Corollario 2.6 ottenendo

$$\frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} x^{2(n+1)}}{\frac{n!}{n^n} x^{2n}} = x^2 \left(\frac{n}{n+1} \right)^n \rightarrow \frac{x^2}{e}$$

relazione da cui segue la convergenza della serie per $x \in]-\sqrt{e}, \sqrt{e}[$ e la sua divergenza per $|x| > \sqrt{e}$. Se $|x| = \sqrt{e}$, otteniamo la serie seguente $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} e^n$ che non può convergere dal momento che $\left(\frac{n!}{n^n} e^n\right)_{n=1}^{\infty}$ è non decrescente, come si può provare facilmente (la dimostrazione viene lasciata al lettore), e quindi non può essere infinitesima. ■

Criterio della Radice (Cauchy). Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ una serie a termini non negativi. Supponiamo che esistano $\nu \in \mathbb{N}, K \in]0, 1[$ tali che $\sqrt[n]{a_n} \leq K$, per ogni $n \in \mathbb{N}, n \geq \nu$; allora, la serie converge. Se, invece, esistono infiniti a_n tali che $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$, allora la serie diverge.

Dimostrazione. Dall’ipotesi $\sqrt[n]{a_n} \leq K$ per ogni $n \in \mathbb{N}, n \geq \nu$ segue facilmente che $a_n \leq K^n$ per ogni $n \in \mathbb{N}, n \geq \nu$, cosicché possiamo affermare che la serie data è maggiorata termine a termine definitivamente dalla serie di termine generale K^n , che è una serie geometrica convergente perché con ragione $K \in]0, 1[$. Dal Teorema di Confronto segue la tesi, nel primo caso. Se, invece, $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$ per infiniti indici, allora la successione (a_n) non può convergere a zero; la serie data non può convergere e deve necessariamente divergere. ■

Il Criterio della Radice di Cauchy ha il seguente corollario

Corollario 2.7. Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ una serie a termini non negativi. Si supponga che esista $L = \lim_n \sqrt[n]{a_n}$

i) se $L < 1$, allora la serie converge

ii) se $L > 1$, allora la serie diverge.

Dimostrazione. Sotto l’ipotesi (i), dalla definizione di limite segue che per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che

$$\sqrt[n]{a_n} < L + \epsilon \quad \forall n > \nu.$$

Poichè $L < 1$ possiamo scegliere $\epsilon \in]0, 1 - L[$ in modo che

$$\sqrt[n]{a_n} < L + \epsilon < 1 \quad \forall n > \nu.$$

La tesi segue allora dal Criterio della Radice. Sotto l'ipotesi (ii), dalla definizione di limite segue che per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che

$$\sqrt[n]{a_n} > L - \epsilon \quad \forall n > \nu.$$

Poichè possiamo scegliere $\epsilon > 0$ in modo che $L - \epsilon \geq 1$ la tesi segue dal Criterio della Radice. ■

Si può provare che se sono verificate le ipotesi del Criterio del Rapporto sono anche verificate quelle del Criterio della Radice; ne viene che il Criterio della Radice è più generale di quello del Rapporto. Il seguente esempio mostra che il Criterio della Radice può essere applicato allo studio di serie alle quali non è applicabile quello del Rapporto, di modo che possiamo affermare che i due criteri non sono equivalenti.

Esempio 2.7. Consideriamo la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3+(-1)^n}{2^n}$, che converge come può essere visto facilmente applicando il Corollario del Criterio della Radice; invece, il Criterio del Rapporto non è applicabile perché $\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ per ogni n dispari e $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{4}$ per ogni n pari. ■

Esercizio 2.3. Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ una serie a termini non negativi tale che esista $\lim_n \sqrt[n]{a_n}$ e sia uguale ad 1. È possibile dire qualcosa sul carattere della serie? ■

Altro importante Criterio per lo studio delle serie a termini non negativi è il seguente

Criterio di Raabe. Sia data la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ a termini tutti positivi. Supponiamo che esistano un numero $K > 1$ ed un indice $\nu \in \mathbb{N}$ tali che per $n > \nu$ si abbia

$$n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) \geq K.$$

Allora la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ è convergente. Se, invece, per $n > \nu$ accade che

$$n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) \leq 1$$

allora la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ è divergente.

Come per il Criterio del Rapporto e della Radice è possibile dare un Corollario del Criterio di Raabe

Corollario 2.8. Sia data la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ a termini tutti positivi. Supponiamo che esista

$$L = \lim_n n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right).$$

Se $L > 1$ allora la serie è convergente. Se, invece, accade che $L < 1$ allora la serie è divergente.

Esempio 2.8. Studiamo attraverso il Corollario 2.8 la serie armonica generalizzata $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, per $\alpha \in [0, +\infty[$, $\alpha \neq 1$ (ricordiamo che essa è già stata studiata per certi valori di α , ma non per tutti); a tal fine si ha

$$\lim_n n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = \lim_n n \left(\frac{\frac{1}{n^\alpha}}{\frac{1}{(n+1)^\alpha}} - 1 \right) = \lim_n \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^\alpha - 1}{\frac{1}{n}} = \alpha;$$

possiamo quindi concludere che la serie armonica generalizzata converge se e solo se $\alpha > 1$, mentre diverge se e solo se $\alpha \leq 1$. ■

Esercizio 2.4. Studiare il carattere della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha - \log n}$ al variare del parametro reale positivo α . ■

Altro fondamentale risultato per lo studio di ampie classi di serie a termini non negativi è il seguente

Criterio di Condensazione di Cauchy. Sia data una serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ a termini non negativi tale che la successione (a_n) sia non crescente. Allora, la serie data ha lo stesso carattere della serie $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$.

Esempio 2.9. Si studi la serie $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta n}$ al variare di $\alpha, \beta \in]0, +\infty[$.

Poiché la serie data è una serie a termini positivi ed $a_n \geq a_{n+1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, possiamo utilizzare il Criterio di Condensazione di Cauchy; dobbiamo allora studiare la serie seguente

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2^n}{(2^n)^\alpha \ln^\beta(2^n)} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(2^{\alpha-1})^n n^\beta \ln^\beta 2}$$

che può essere agevolmente studiata con il Corollario 2.6; si ha

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{(2^{\alpha-1})^{n+1} (n+1)^\beta \ln^\beta 2}}{\frac{1}{(2^{\alpha-1})^n n^\beta \ln^\beta 2}} = \frac{1}{2^{\alpha-1}} \left(\frac{n}{n+1} \right)^\beta$$

da cui segue che

$$\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2^{\alpha-1}}.$$

Ne viene che la serie in esame converge se $\alpha > 1$, con β arbitrario e diverge se $\alpha < 1$, con β arbitrario; se $\alpha = 1$ nulla possiamo dire utilizzando il Corollario 2.6; tuttavia, per $\alpha = 1$, sempre applicando il Criterio di Condensazione, si ricava facilmente che la serie da studiare ha lo stesso carattere della serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n}{2^n \ln^\beta(2^n)} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln^\beta(2^n)}$$

che, come si vede facilmente, ha lo stesso carattere della serie armonica generalizzata; concludiamo, quindi, che la serie da studiare converge per $\alpha = 1, \beta > 1$, mentre diverge per $\alpha = 1, \beta \leq 1$. ■

§3. Maggiorazione dell'errore.

I termini della successione delle somme parziali di una serie convergente forniscono una approssimazione del valore del numero somma della serie stessa; è chiaro che sarebbe auspicabile, in ogni caso, conoscere una stima di tale approssimazione, ottenere cioè quella che viene comunemente chiamata *maggiorazione dell'errore* che si commette sostituendo al valore della somma di una serie convergente un opportuno termine della successione delle somme parziali della stessa serie. In tale paragrafo vogliamo osservare che maggiorazioni simili possono essere ottenute per serie a termini positivi convergenti, qualora esse verifichino le ipotesi del Criterio del Rapporto o della Radice; infatti, un'analisi attenta delle loro dimostrazioni prova che in entrambe i casi il resto n-esimo della serie viene maggiorato, definitivamente, dal termine generale di una serie geometrica, serie della quale sappiamo calcolare la somma; cosicché possiamo maggiorare la quantità $|S - s_n|$, definitivamente, con quantità che permettono la valutazione dell'errore. I seguenti esempi illustrano quanto detto

Esempio 3.1. Consideriamo la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ ed applichiamo ad essa il Criterio del Rapporto; sappiamo già che

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{1}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N};$$

ne viene che (si veda la dimostrazione del Criterio del Rapporto)

$$a_{n+p} \leq \frac{1}{2^p} a_n \quad \forall n, p \in \mathbb{N}$$

e quindi, detta S la somma di tale serie, si ha che

$$0 \leq S - \sum_{n=1}^p \frac{n!}{n^n} = \sum_{n=p+1}^{+\infty} \frac{n!}{n^n} = \sum_{h=1}^{+\infty} \frac{(p+h)!}{(p+h)^{p+h}} \leq \frac{p!}{p^p} \sum_{h=1}^{+\infty} \frac{1}{2^h} = \frac{p!}{p^p}$$

che è la maggiorazione richiesta. ■

Osserviamo infine che per avere una maggiorazione dell'errore è in realtà sufficiente essere in grado di maggiorare, per ogni $n \in \mathbb{N}$, il resto n-esimo della serie data con una serie della quale sappiamo calcolare la somma.

Esempio 3.2. *Trovare una maggiorazione dell'errore per la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6}$, che, come è noto, converge.*

Notiamo che si ha

$$\frac{1}{n^6} \leq \frac{1}{n^4} \frac{1}{(n-1)n} = \frac{1}{n^4} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2.$$

Per $p, q \in \mathbb{N}, q \geq p \geq 2$, otteniamo allora

$$\sum_{n=p}^q \frac{1}{n^6} \leq \sum_{n=p}^q \frac{1}{n^4} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) \leq \frac{1}{p^4} \sum_{n=p}^q \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) =$$

$$\frac{1}{p^4} \left(\frac{1}{p-1} - \frac{1}{q} \right) \xrightarrow{q \rightarrow \infty} \frac{1}{p^5 - p^4}.$$

Detta S la somma della serie si ha così

$$\left| S - \sum_{n=1}^p \frac{1}{n^6} \right| \leq \frac{1}{p^5 - p^4} \quad \forall p \in \mathbb{N}, p \geq 2. \blacksquare$$

§4. Convergenza assoluta. Serie a termini di segno alterno..

Se i termini di una serie reale non sono di segno costante. In questo paragrafo vogliamo, innanzitutto, illustrare i primi e più semplici metodi che possono essere utilizzati quando i termini di una serie non hanno, definitivamente, lo stesso segno.

Definizione 4.1. *Data una serie numerica $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diremo che essa converge assolutamente se converge la serie $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$.*

Lo studio della serie $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ può essere effettuato più agevolmente dello studio della serie iniziale perché essa è a termini reali non negativi e quindi possiamo utilizzare un buon numero dei precedenti Criteri; la convergenza di $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ implica, poi, la convergenza di $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ come il seguente risultato di immediata dimostrazione prova

Teorema 4.1. *Ogni serie numerica $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ assolutamente convergente è convergente.*

Dimostrazione. La dimostrazione è immediata conseguenza dell'applicazione del Criterio di Convergenza di Cauchy alle serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$, una volta che si tenga conto della ben nota disuguaglianza

$$|a_n + a_{n+1} + \dots + a_{n+p}| \leq |a_n| + |a_{n+1}| + \dots + |a_{n+p}| \quad \forall n, p \in \mathbb{N}. \blacksquare$$

Esercizio 4.1. *Provare che la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ converge assolutamente per ogni $z \in \mathbb{R}$.* ■

Lo studio della serie $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ non ha, invece, alcuna utilità per lo studio di $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, quando $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| = +\infty$, come un successivo esempio dimostrerà.

Un importante Criterio che si utilizza molto spesso per determinare la convergenza di serie numeriche con termini di segno alterno è il seguente

Criterio di Leibnitz. *Sia (z_n) una successione di numeri reali non negativi, non crescente ed infinitesima. Allora la serie a segni alterni $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z_n$ converge. Inoltre, detta S la somma della serie e (s_n) la successione delle somme parziali, si ha la seguente maggiorazione dell'errore*

$$|S - s_{p-1}| = \left| \sum_{h=p}^{\infty} (-1)^h z_h \right| \leq a_p \quad \forall p \in \mathbb{N}, p \geq 1.$$

Utilizzando il Criterio di Leibnitz studiamo la seguente serie

Esempio 4.1. La serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$ converge, come si dimostra facilmente grazie al Criterio di Leibnitz; essa però non converge assolutamente; ciò prova quanto già detto prima e cioè che se una serie non converge assolutamente nulla può essere detto sul carattere della serie stessa.

Esempio 4.2. Determinare i valori del parametro $x \in \mathbb{R}$ per i quali converge la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n \left(e^{\frac{1}{n}} - 1 \right) x^n$. Innanzitutto, osserviamo che essa converge per $x = 0$; quindi consideriamo la serie dei valori assoluti ed applichiamo ad essa il Corollario 2.6

$$\frac{\frac{e^{\frac{1}{n+1}} - 1}{n+1} |x|^{n+1}}{\frac{e^{\frac{1}{n}} - 1}{n} |x|^n} \rightarrow |x| \quad \text{se} \quad n \rightarrow \infty$$

(si noti che si è fatto uso di un limite notevole enunciato nel capitolo sulle successioni); quindi la serie data converge se $|x| < 1$; possiamo, anche, dire che la serie diverge per $x > 1$, mentre per $x < -1$ si ha $n \left(e^{\frac{1}{n}} - 1 \right) |x|^n \rightarrow \infty$, cosicché la serie non può convergere; studiamo adesso la serie per $|x| = 1$, osservando che $\lim_n \frac{e^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} = 1$; possiamo concludere che la serie non può convergere per $|x| = 1$. ■