0. Introduzione

L'Automatica è una disciplina del settore dell'Ingegneria dell'Informazione.

Come tale, essa si occupa di sviluppare metodi e strumenti per la realizzazione di macchine e sistemi artificiali che siano capaci di regolare il proprio funzionamento senza bisogno di ricorrere all'intervento dell'uomo (macchine e sistemi automatici).

Nelle fasi di studio, l'Automatica si avvale di strumenti prevalentemente matematici.

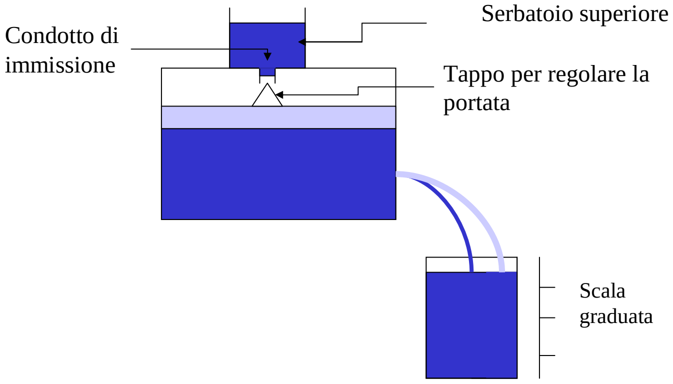
Nelle fasi applicative/realizzative l'Automatica si avvale di strumenti matematici, informatici e tipici dell'elettronica e delle telecomunicazioni.

Gli ambiti di applicazione coprono la totalità dei settori ingegneristici e si estendono a quelli dell'economia, della medicina ed anche delle scienze sociali.

0.1 Esempi

Esempio

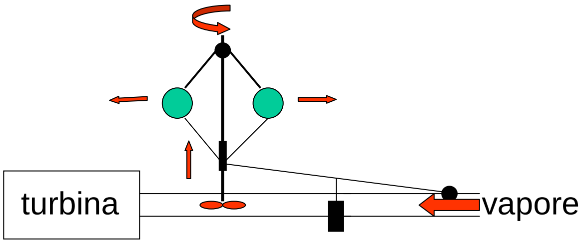
L'orologio ad acqua di età alessandrina :



0.2 Esempi

Esempio

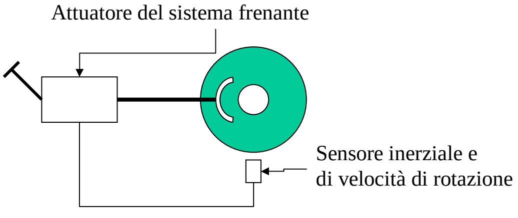
Regolatore di Watt (governor):



0.3 Esempi

Esempio

Sistema ABS per la regozione della frenata:



1.1 Oggetti fisici e modelli

Mediante i metodi e gli strumenti dell'Automatica vogliamo intervenire sugli oggetti e sui fenomeni fisici che riscontriamo nel mondo che ci circonda, che interagiscono con noi in vario modo e che esercitano su di noi effetti di vario tipo.

Per poter governare e gestire, secondo determinati obiettivi, il nostro rapporto con questa realtà fisica ci occorrono innanzitutto degli strumenti che ci permettano, in tutta generalità, di rappresentare in modo agevole gli oggetti e i fenomeni fisici in relazione al rapporto che essi hanno tra di loro e con noi.

Tale rappresentazione si avvale di modelli che, in pratica, concentrano ed esplicitano (parte del)l'informazione disponibile su un determinato oggetto o fenomeno.

1.2 Modelli/Esempi

1.1 Esempio

Numerose attività umane su larga scala (nell' agricoltura, commercio, industria, …) sono fortemente influenzate dall'avvicendarsi delle stagioni. Questa osservazione stimolò, agli inizi della storia umana, l'interesse per la realizzazione di un calendario, che non è altro che un modello del ciclo annuale delle stagioni. Sapere quanti giorni mancano all'arrivo dell'inverno o all'inizio della stagione delle piogge consente di organizzare al meglio le attività menzionate sopra ed è anzi un fattore chiave di successo in epoche pre-tecnologiche. Ciò spiega il motivo per il quale le società primitive impegnarono cospicue risorse (in una società pre-tecnologica occorre che numerosi individui lavorino alla produzione di cibo e mezzi di sostentamento per consentire ad un altro individuo di dedicarsi soltanto ad un lavoro intellettuale) nell'osservazione dei fenomeni astronomici e atmosferici, cioè nella raccolta di dati sul comportamento del ciclo stagionale, al fine di elaborare sotto forma di calendario un preciso modello dell'avvicendarsi delle stagioni.

L'uso che si fa del modello, in questo caso, consiste nel formulare previsioni sull'andamento futuro del fenomeno in oggetto sulla base della situazione attuale.

(Altri esempi simili?)

1.3 Modelli/Esempi

1.2 Esempio

Quando siamo sotto una doccia abbiamo necessità di regolare il getto d'acqua sia come intensità che come temperatura e lo facciamo agendo sui rubinetti dell'acqua calda e fredda o sul miscelatore. Il sistema fisico costituito dalla caldaia o dal serbatoio di acqua calda e dall'impianto idraulico risponde alla nostra azione variando la portata e la temperatura in maniera caratteristica. L'esperianza ci mostra che prima di ottenere il risultato desiderato dobbiamo "imparare" come reagisce tale sistema (accade, ad esempio, che se diminuiamo troppo la portata, non sia possibile mantenere una temperatura sufficientemente alta, oppure che intercorra un ritardo significativo tra la nostra azione e il manifestarsi di una risposta apprezzabile). Imparare come reagisce il sistema equivale a farsi un modello mentale dello stesso (in relazione a quanto esemplificato prima, il nostro modello della doccia conterrà l'informazione relativa alla portata minima per mantenere una temperatura sufficientemente alta o all'entità del ritardo con il quale il sistema reagisce in maniera apprezzabile ai nostri comandi). La nostra doccia sarà tanto più piacevole quanto più è accurato il modello che ci siamo fatti. L'uso che si fa del modello, in questo caso, consiste nell'utilizzarlo per formulare una strategia di controllo, da attuare azionando i rubinetti o il miscelatore, per ottenere un risultato desiderato (si confronti col caso visto in precedenza).

(Altri esempi simili?)

1.4 Modelli/Esempi

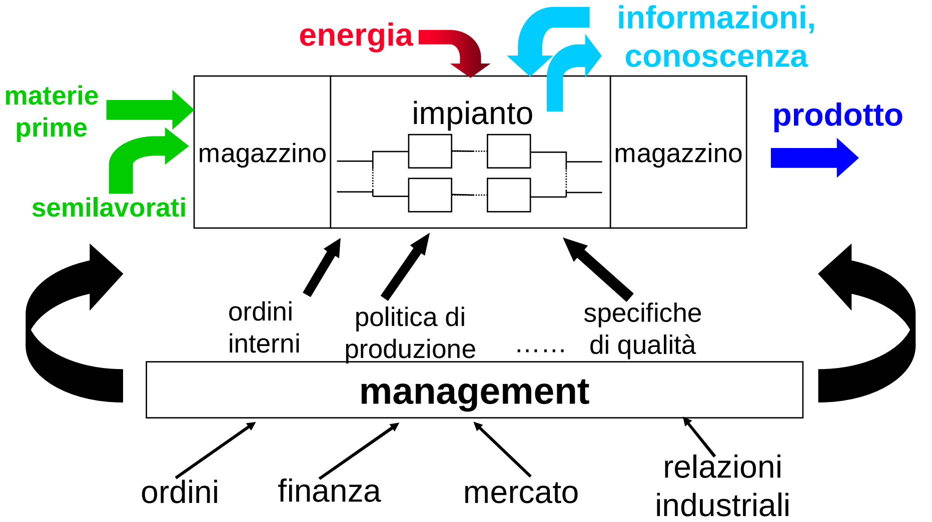
Esempio:

Sistema di produzione

•Insieme organizzato di persone e macchine operanti
- entro spazi apposití
- con tempi e ritmi opportuni
- secondo procedure formalizzate
- per produrre beni o utilities
- a partire da materie prime e/o semilavorati

•La finalità è rendere disponibili ai clienti prodotti
- nella quantità stabilita ed ai prezzi fissati
- con le caratteristiche fissate
- nei tempi stabiliti
- ottimizzando i costi

Sistema di Produzione



•Risorse finite da impegnare in modo efficiente

•Comportamento da realizzare in modo preciso

1.4 Modelli/Esempi

•Produzione di ciclomotori.

•Produzione di energia elettrica.

•Gestione del traffico su una rete telefonica.

•Gestione del traffico automobilistico/ferroviario.

•Produzione di un pasto.

- Occorre disporre delle materia prime o degli eventuali semilavorati nelle quantità e con la tempistica richiesta.
- Diverse lavorazioni (lavaggio, taglio, cottura, eccetera) avvengono in uno specifico impianto (la cucina)., dotato di diversi macchinari (forno, fornelli, lavapiatti, eccetera). Ciascuna lavorazione avviene secondo procedure specifiche.
- La produzione deve rispettare un certo numero di macro specifiche(composizione del pasto, tempistica, qualità, eccetera).

2.1 Sistemi dinamici

I modelli che utilizziamo nell'ambito dell'Automatica prendono il nome di SISTEMI o SISTEMI DINAMICI. Il nostro primo obiettivo sarà dunque quello di comprendere appieno cosa sia un SISTEMA e cosa significhi usarlo come modello di un oggetto o di un fenomeno fisico.

Per dare una definizione operativa di SISTEMA occorre introdurre preliminarmente alcuni concetti.

Consideriamo un insieme T i cui elementi verranno usati come indici. Possiamo scegliere, ad esempio, $T = \{1,2,3,\ldots\}$, oppure $T = \mathbf{Z}$ (insieme dei numeri relativi) o $T = \mathfrak{R}$ (insieme dei numeri reali). La cosa importante è che T sia un insieme *ordinato*. Nel caso della prima scelta che abbiamo esemplificato, assegnare gli indici 1,2,3,…. agli oggetti di un insieme significa disporre tali oggetti in un determinato ordine logico. Nel caso delle altre scelte esemplificate, possiamo pensare che ciascun indice in T specifichi un determinato istante di tempo: parleremo di *tempo discreto* quando utilizziamo i numeri relativi per indicare i vari istanti e parleremo di *tempo continuo* quando utilizziamo i numeri reali.

2.2 Sistemi dinamici

EVENTO: tutto ciò che, ad un certo istante, colpisce i nostri sensi; indicheremo con E l'insieme di (tutti i) possibili eventi e con $e \in E$ un singolo evento.

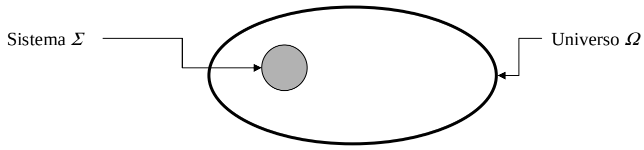
COMPORTAMENTO: successione di eventi ordinata rispetto a T; indicheremo un singolo comportamento con $c = \{e_i\}_{i \in I \subseteq T}$ o anche con $c = e(t)_{t \in I \subseteq T}$, dove I è un intervallo in T.

UNIVERSO DEI COMPORTAMENTI: l'insieme di (tutti i) possibili comportamenti indiciati in un qualsiasi intervallo $I \subseteq T$ fissato (se T rappresenta il tempo, questi saranno i comportamenti possibili nel corso dell'intervallo temporale $I \subseteq T$): indicheremo l'universo con $\Omega = E^I$.

2.3 Sistemi dinamici

2.1 Definizione

Un *sistema dinamico* Σ è definito come un sottoinsieme dell'universo di comportamenti Ω: $\Sigma \subseteq \Omega$.



Dato un sistema $\Sigma \subseteq \Omega$, ogni comportamento $c \in \Sigma$ rappresenta un possibile comportamento del sistema relativamente nell'intervallo $I \subseteq T$ al quale ci si riferisce. Da questo punto di vista, la Definizione 2.1 asserisce che, per quanto riguarda i nostri scopi, un sistema dinamico è un oggetto astratto caratterizzato da un insieme di comportamenti: esattamente quelli, tra tutti i comportamenti presenti nell'universo Ω, che gli sono propri o che, in altri termini, esso è capace di esibire.

2.4 Sistemi dinamici

Notazioni

Quando rappresentiamo un comportamento c come $c = \{e_i\}_{i \in I \subseteq T}$ o come $c = e(t)_{t \in I \subseteq T}$, dove I è un intervallo in T, interpretiamo e come una variabile dipendente (dall'indice i o dall'istante di tempo t), definita sull'intervallo $I \subseteq T$, a valori in E. In questa accezione, e_i o $e(t)$ rappresenta il valore assunto da tale variabile dipendente in corrispondenza dell'indice i o dell'istante t. Diremo che il comportamento c è descritto dall'andamento di e su $I \subseteq T$.

Può accadere che sia utile rappresentare ogni singolo evento $e \in E$ come costituito da un certo numero, ad esempio n, di eventi più semplici. Ciò equivale a pensare la variabile e come una variabile a più dimensioni, che rappresenteremo in forma vettoriale come

$$e = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)^T$$

o come un vettore di più variabili. In corrispondenza dell'indice i o dell'istante t si avrà l'evento $e_i = (e_1(i), e_2(i), \ldots, e_n(i))$ o, rispettivamente, $e(t) = (e_1(t), e_2(t), \ldots, e_n(t))$.

2.5 Sistemi e modelli

Possiamo pensare che ogni sistema dinamico $\Sigma \subseteq \Omega$, che come abbiamo detto è un oggetto astratto, non sia altro che il modo nel quale un oggetto concreto o un fenomeno (sistema fisico) *S* si manifesta ai nostri sensi. Così facendo, associamo in pratica il sistema Σ ad *S*.

Ogni volta che associamo ad un oggetto concreto o a un fenomeno *S* un sistema dinamico astratto Σ, cioè un insieme di comportamenti scelti in un universo Ω, diciamo che utilizziamo il sistema Σ come un modello per descrivere l'oggetto *S* o un modello di *S*.

Per uno stesso oggetto *S* si possono avere diversi modelli, ciascuno caratterizzata da un diverso contenuto di informazione. Diremo, in questo caso, che ciascun modello è relativo ad un diverso *livello di rappresentazione* e, di norma, intenderemo come più alto il livello di rappresentazione associato al modello che contiene la quantità maggiore di informazione.

2.6 Sistemi dinamici/Esempi

Per illustrare il concetto di sistema dinamico tramite esempi, è opportuno fare riferimento a situazioni concrete, nelle quali una o più entità fisiche concorrono a generare i comportamenti di nostro interesse. Ciò che occorre comprendere è che il punto di vista che vogliamo sviluppare pone l'accento sul sistema visto come insieme astratto di comportamenti e non come oggetto fisico.

1.2 Esempio

Consideriamo un semaforo (o un insieme di semafori sincronizzati tra loro). Dal punto di vista di un automobilista, ciò che interessa nel comportamento del semaforo è l'alternarsi di luci di colore verde (V), giallo (G) e rosso (R) su una faccia del semaforo. Indichiamo rispettivamente con V, G, R, VG, VR, GR, VGR e 0 (= spento) gli eventi relativi ad ogni possibile combinazione di luci.

E = {V, G, R, VG, VR, GR, VGR, 0}

Ω = {insieme di tutte le possibili sequenze di elementi di E }

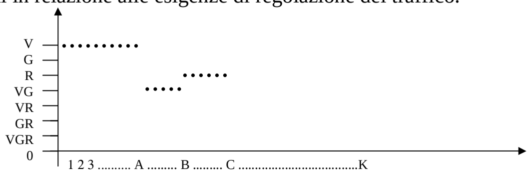
Nell'ipotesi che il semaforo funzioni correttamente, un suo modello $\Sigma_{semaforo} \subseteq \Omega$ è facilmente caratterizzabile come un sottoinsieme di sequenze (comportamenti) di *U*, (quali esattamente ?).

2.7 Sistemi dinamici/Esempi

1.3 Esempio

Consideriamo ancora il semaforo dell'esempio precedente, questa volta dal punto di vista di un tecnico incaricato di regolare i flussi di traffico all'incrocio dove è sistemato il semaforo.

A differenza di quanto supposto per l'automobilista del precedente Esempio, è da presumere che al tecnico interessi, oltre al semplice alternarsi di luci di vario colore, anche la tempistica con la quale tutto ciò avviene. Indichiamo ancora con E = {V, G, R, VG, VR, GR, VGR, 0} l'insieme delle possibili combinazioni di luce su una faccia (eventi) e supponiamo che, per quanto interessa al tecnico in questa situazione, il tempo possa essere scandito in secondi. Quindi, scelto $T = \mathbf{Z}$ (insieme dei numeri relativi) per rappresentare il tempo discreto, l'universo Ω dei possibili comportamenti relativamente ad un intervallo I = [0, K] $\subseteq T$ risulta costituito dalle funzioni f(t): $I \rightarrow E$. Sarà compito del tecnico predisporre il funzionamento del semaforo in modo tale che $\Sigma_{semaforo}$ contenga solo i comportamenti che risultano desiderabili in relazione alle esigenze di regolazione del traffico.



(Quale dei due modelli del semaforo è relativo al livello di rapresentazione più alto? Quale potrebbere essere un modello del semaforo in tempo continuo?

3.1 Rappresentazione di un sistema dinamico

Osserviamo che ci sono vari modi per specificare quali elementi dell'universo Ω facciano parte di Σ, cioè di un dato sistema o modello:

• mediante un elenco o una tabella;

• mediante un insieme di regole linguistiche;

• mediante un insieme di regole matematiche.

In generale, utilizzeremo un formalismo del tipo $\Sigma = \{c \in \Omega$, tali che $P(c)$ = $VERO\} \subseteq \Omega$, dove con $P(c)$ = $VERO$ indichiamo il fatto che il comportamento c soddisfa una certa condizione P. Il modo utilizzato per specificare quali elementi dell'universo Ω facciano parte di Σ da luogo a quella che viene chiamata una rappresentazione di Σ.

3.2 Rappresentazione/Esempi

1.4 Esempio

Si descriva $\Sigma_{semaforo}$ dell'Esempio 1.2 mediante

a) una tabella,

b) un insieme di regole linguistiche.

1.5 Esempio

Si consideri una certa quantità di un gas perfetto contenuto in un volume costante V e se ne indichino con P(t) e T(t) rispettivamente la pressione e la temperatura all'istante t. La Legge dei Gas Perfetti afferma che vale la relazione PV = RT, dove R è una costante. Si espliciti, mediante la legge matematica ricordata, un modello che descriva in tempo continuo i possibili comportamenti, in termini di pressione e temperatura, di tale quantità di gas.

3.3 Rappresentazione/Esempi

1.6 Esempio

Consideriamo il sistema fisico costituito dal Sole e dalla Terra che ruota attorno ad esso. Keplero fornì un modello del comportamento di tale sistema affermando che il moto della Terra rispetta le seguenti tre leggi

a) la Terra si muove su un'orbita ellittica avente il Sole in uno dei fuochi;

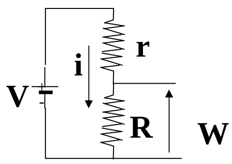
b) la congiungente Terra-Sole spazza aree uguali in tempi uguali;

3.4 Rappresentazione/Esempi

1.8 Esempio

Si consideri il dispositivo elettrico denominato Partitore di Tensione illustrato nello schema sottostante:

Supponendo costanti i valori delle resistenze **R** e **r**, le grandezze fisiche (variabili) che caratterizzano il comportamento del dispositivo, cioè le tensioni **V** e **W** e la corrente **i**, sono legate dalle relazioni **W = VR/(R+r)** e **i = V/(R+r)**.



Un modello $\Sigma_{partitore}$ sarà dato nell'universo Ω = {f(t): $\Re \to \Re^3$; f(t) continua} da $\Sigma_{partitore}$ = {f(t) $\in$ Ω, f(t) = (V(t), V(t)**R/(R+r)**, V(t)/**(R+r)**)}.

(Qual'è l'insieme degli eventi e cosa significano?)

(Quale sarà un modello se immaginiamo di poter variare, sempre in modo continuo, il valore della resistenza r ?)

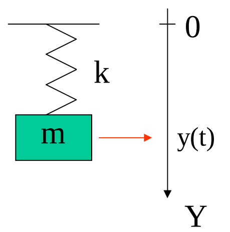
3.5 Rappresentazione/Esempi

1.9 Esempio

Si consideri il sistema meccanico costituito dalla massa m sospesa ad una molla avente costante elastica k.

Indicando con y(t) la posizione della massa e trascurando la presenza della forza di gravità o di eventuali attriti, è facile mostrare che y(t) verifica l'equazione differenziale lineare del secondo ordine

$$\ddot{y}(t) = -{}^{k}\!/\!{}_{m}\, y(t)$$



(Descrivere in dettaglio l'insieme degli eventi e l'universo.)

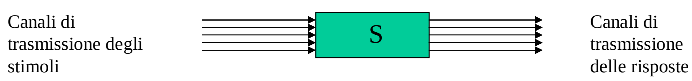
4.1 Struttura di un sistema

Come detto a suo tempo, i comportamenti di un dato sistema Σ sono di solito descritti dall'andamento di un certo numero di variabili e_i , che sono le componenti di una variabile a più dimensioni $e = (e_1, e_2, \ldots, e_n)^T$.

Tali variabili possono, in molti casi, venire classificate in base al ruolo che assegnamo loro nella rappresentazione di Σ. La presenza di una tale classificazione conferisce struttura al sistema Σ .

4.2 Struttura/Ingressi e uscite

Supponiamo di prendere in considerazione un sistema fisico S con il quale sia possibile interagire attraverso uno scambio di stimoli (cioè di segnali di qualche tipo inviati dall'ambiente esterno al sistema) e di risposte (cioè di segnali inviati dal sistema all'ambiente esterno, in seguito all'elaborazione degli stimoli ricevuti) (esempi?).



In un qualsiasi modello Σ di S, i comportamenti saranno rappresentati mediante l'andamento di un certo numero di variabili, alcune delle quali descriveranno i valori assunti dai segnali di stimolo e altre descriveranno i valori assunti dai segnali di risposta (oltre ad eventuali variabili che non appartengono a nessuno di questi due gruppi). Le prime verranno denominate variabili di ingresso, o ingressi o input al sistema Σ e le seconde verranno denominate uscite, o risposte o output del sistema Σ.

4.3 Struttura/Ingressi e uscite

Notazione

Se è possibile decomporre ciascun evento e di un insieme E in una parte interpretabile come uno stimolo esterno (ingresso) e una parte interpretabile come una risposta (uscita), indicheremo il singolo evento con $e = (u, y)$ e porremo $E = U \times Y$. L'universo dei comportamenti relativo ad T, in questo caso, sarà denotato con $\Omega = (U \times Y)^T = U^T \times Y^T$ ed il singolo comportamento con $c = \{u_i, y_i\}_{i \in I \subseteq T}$ o anche con $c = (u(t), y(t))_{t \in I \subseteq T}$.

2.1 Definizione

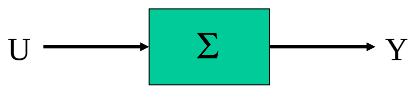
Un sistema $\Sigma \subseteq U^T \times Y^T$, nella cui rappresentazione si possono individuare ingressi e di uscite, si dice *sistema ingresso/uscita* o *sistema orientato*.

2.2 Esempio

Un esempio è dato dal partitore di tensione dell'Esempio 1.8, interpretando la tensione V come l'ingresso al sistema e la corrente i e la tensione W come le risposte.

4.4 Struttura/Sistema orientato

Un sistema orientato $\Sigma \subseteq U^I \times Y^I$ si rappresenta schematicamente nel modo seguente



Osservazione

Si noti che nella descrizione di un evento e possono essere presenti variabili che non sono interpretabili come ingressi o uscite (si rivedano gli Esempi 1.8 e 1.9). Tali variabili, il cui ruolo è molto spesso quello di rendere quanto più semplice e maneggevole possibile la rappresentazione del sistema in oggetto, verranno genericamente dette variabili ausiliarie.

4.5 Struttura/Esempi

Esempio

Consideriamo una popolazione composta al tempo t da $x_1(t)$ individui, una parte dei quali (diciamo 1/k) giungono a maturità e si riproducono generando una prole di un individuo ciascuno all'istante t+1. Supponiamo che ad ogni istante t si possano immettere (o prelevare) u(t) individui e indichiamo con m la massa (media) di ciascun individuo. Tale popolazione costituitsce un sistema che evolve a tempo discreto in cui u(t) e y(t) = m $x_1(t)$ possono essere pensate come ingresso e uscita.

Per dare una semplice descrizione del comportamento del sistema, conviene introdurre una variabile $x_2(t)$ che rappresenti il numero di individui che nascono al tempo t. Le regole enunciate sopra, quindi, si esplicitano come segue:

$$\begin{cases} x_2(t+1) = \frac{1}{k} x_1(t) \\ x_1(t+1) = x_1(t) + x_2(t) + u(t) \\ y(t) = m x_1(t) \end{cases}$$

Le variabili x_i costituiscono un esempio di variabili ausiliarie.

4.7 Struttura/Stato

Come abbiamo già osservato, è possibile che nella descrizione del comportamento di un sistema orientato Σ compaiano variabili ausiliarie che non sono interpretabili come rappresentative di ingressi o di uscite.

In alcuni casi significativi, alcune di queste variabili assumono un ruolo importante, descritto dalla definizione seguente:

2.1 Definizione

Dato un sistema orientato

$$\Sigma = \{(u(t),y(t),x(t)),\ P(u(t),y(t),x(t)) = VERO\} \subseteq \Omega = U^I \times Y^I \times X^I$$

con u variabile di ingresso e y variabile di uscita, la variabile ausiliaria x è detta *stato* di Σ se, dati due comportamenti

$$c(t) = (u(t),y(t),x(t)) \in \Sigma \qquad c'(t) = (u'(t),y'(t),x'(t)) \in \Sigma$$

per ogni $t_0 \in T$, si ha che

a) $x(t_0) = x'(t_0)$ implica che il comportamento $c''(t)$ definito da $c''(t) = c(t)$ per $t < t_0$ e $c''(t) = c'(t)$ per $t \geq t_0$ appartiene a Σ;

b) $x(t_0) = x'(t_0)$ e $u(t) = u'(t)$ per $t \geq t_0$, implica $c(t) = c'(t)$ per $t > t_0$.

4.7bis Struttura/Stato

Osservazione

Dati due comportamenti $c(t) = (u(t),y(t),x(t))$ e $c'(t) = (u'(t),y'(t),x'(t))$, il comportamento $c''(t)$ definito da

$$c''(t) = c(t) \text{ per } t < t_0$$
$$c''(t) = c'(t) \text{ per } t \geq t_0$$

viene detto concatenazione in t_0 di $c(t)$ e $c'(t)$.

La definizione di stato che abbiamo dato nella diapositiva precedente dice, in sostanza, che la variabile $x(t)$ è uno stato se la concatenazione in t_0 di due comportamenti $c(t)$ e $c'(t)$ di Σ, per i quali si abbia $x(t_0) = x'(t_0)$, da luogo ad un ulteriore comportamento di Σ.

4.8 Struttura/Stato

La nozione di stato che abbiamo introdotto si caratterizza in particolare per la seguente importante proprietà:

4.1 Proposizione (Proprietà dello stato)

Dato un sistema orientato

$$\Sigma = \{(u(t),y(t),x(t)),\ P(u(t),y(t),x(t)) = VERO\} \subseteq \Omega = U^I \times Y^I \times X^I$$

con ingresso u, uscita y e stato x, si ha che, in ogni comportamento $c(t) = (u(t),y(t),x(t) \in \Sigma$ e per ogni $t_0 \in T$, l'uscita $y(t)$ per $t > t_0$ è determinata da $x(t_0)$ e $u(t)$ per $t \geq t_0$.

Dimostrazione. Viene lasciata per esercizio.

Se, nella rappresentazione di Σ considerata sopra, T rappresenta il tempo, la Proposizione 4.1 asserisce che, posto t_0 = *istante presente*, l'uscita $y(t)$ nel futuro (cioè per $t > t_0$) è determinata dal valore dello stato all'istante presente $x(t_0)$ e dal valore dell'ingresso $u(t)$ a partire dall'istante presente.

4.9 Esempio

Si consideri il sistema meccanico costituito dalla massa m sospesa ad una molla avente costante elastica k. Come già visto, indicando con y(t) la posizione della massa e trascurando la presenza della forza di gravità o di eventuali attriti, si ha che y(t) verifica l'equazione differenziale lineare del secondo ordine

$$\ddot{y}(t) = -\frac{k}{m}\, y(t)$$

Per risolvere l'equazione, cioè predire il movimento, occorre conoscere la posizione e la velocità della massa all'istante 0 (condizioni iniziali).

Introducendo le variabili ausiliarie $x_1 = y$ e $x_2 = y$, possiamo riscrivere l'equazione che descrive il moto come un sistema di due equazioni differenziali lineari del primo ordine

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -\frac{k}{m}\, x_1(t) \end{cases}$$

Si verifichi che le variabili ausiliarie $x_1 = y$ e x_2 rappresentano lo stato del sistema.

4.10 Struttura/Stato

Lo stato rappresenta una misura dell'energia (o dell'informazione) contenuta nel sistema.

Lo stato può essere visto come rappresentativo della memoria del sistema.

5.1 Classi di modelli

Da quanto abbiamo detto fino ad ora si comprende che per assegnare un modello di un sistema fisico S occorre fissare, attraverso una scelta opportuna dell'insieme degli eventi E e dell'insieme degli indici T, un universo Ω, e quindi specificare i possibili comportamenti di S in Ω.

A seconda dei casi, l'insieme degli eventi E può essere scelto come

• un insieme *discreto* (intuitivamente rappresentabile come un insieme di punti isolati gli uni dagli altri in uno spazio $\Re^N$),

• un insieme *continuo* (intuitivamente rappresentabile come l' insieme dei punti che riempiono un aperto di $\Re^N$).

5.2 Classi di modelli

L'insieme degli indici verrà scelto in base all'interesse, alla possibilità e/o all'esigenza di descrivere i comportamenti di S in relazione allo scorrere del tempo o meno. In particolare, se scegliamo T come insieme dei tempi, possiamo specificare cosa accade in ogni istante. In alternativa, cioè se T non è visto come un insieme dei tempi, possiamo specificare solamente l'ordine in cui accadono gli eventi.

La prima soluzione è adatta al caso di sistemi per i quali la successione di eventi che descrive un comportamento può essere temporizzata, cioè vista come una funzione del tempo: parleremo in tal caso di sistemi *time-driven*.

La seconda soluzione è adatta al caso di sistemi per i quali la successione di eventi che descrive un comportamento non può essere temporizzata, in quanto il verificarsi di determinati eventi è indipendente dal tempo: parleremo in tal caso di sistemi *event-driven*.

5.3 Classi di modelli

Una volta fissato l'universo Ω, occorre, come abbiamo detto, assegnare un modo per determinare i possibili comportamenti di S in Ω.

A questo scopo, ci si avvale, in generale:

- di informazione raccolta osservando il comportamento del sistema fisico in varie (o in tutte le) situazioni possibili (si pensi all'esempio del semaforo o del calendario),
- di informazione dedotta dalla conoscenza di parametri strutturali e ipotesi di leggi fisiche o regole di altro tipo che determinano il comportamento del sistema stesso (si pensi all'esempio del sistema meccanico Massa/Molla).

5.4 Classi di modelli

L'informazione del primo tipo può rivestire un ruolo preminente nei casi in cui i comportamenti del sistema presentino una limitata variabilità (gli eventi di interesse sono pochi o il comportamento è ripetitivo) e si possa ricorrere ad un insieme degli eventi di tipo discreto. Spesso, in queste situazioni, si può giungere a costruire modelli la cui rappresentazione è data da un elenco o una tabella che enumerano (eventualmente mediante convenzioni stabilite) tutti i comportamenti possibili.

In casi più complessi, sarà l'informazione del secondo tipo a risultare più significativa. In queste situazioni, è utile di solito ricorrere a regole matematiche di vario tipo per specificare quali siano i comportamenti possibili.

5.5 Classi di modelli

Nel seguito, focalizzeremo la nostra attenzione su sistemi dinamici che, in base alla loro rappresentazione, possono essere raggruppati in due classi, rispondenti, rispettivamente, alle esigenze di modellazione espresse sopra.

Si tratta dei cosiddetti Sistemi Dinamici ad Eventi Discreti, o DEDS, che sono particolarmente efficaci per modellare i comportamenti nel caso di insiemi di eventi di tipo discreto, e dei cosiddetti SISTEMI DINAMICI LINEARI, che sono utilizzabili per modellare un gran numero di fenomeni interessanti in vari settori.

6.1 DEDS e Automi

Definizione

Sia E un insieme di eventi di tipo discreto e si consideri l'insieme ordinato $T = \{1,2,3,\ldots\}$. Un sistema dinamico $\Sigma \subseteq \Omega = E^T$ viene detto *sistema dinamico ad eventi discreti* o *DEDS (Discrete Events Dynamical System).*

Osserviamo che nella Definizione precedente T può essere visto come insieme dei tempi, misurati in maniera discreta a partire dall'istante 1, o, in alternativa, come un insieme di indici che marcano una sequenza logica. Nel primo caso il DEDS sarà visto come un sistema time-driven a tempo discreto, mentre nel secondo caso sarà visto come un sistema event-driven.

6.2 DEDS e Automi

La rappresentazione più efficace di un DEDS (ricordiamo che una rappresentazione di un sistema dinamico Σ non è altro che un modo per specificare quali comportamenti dell'universo Ω appartengano a Σ), in particolare nel caso in cui E sia un insieme finito, si ottiene impiegando strutture matematiche che vengono dette *automi*.

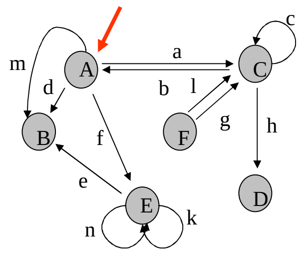
In termini generali (daremo più avanti una definizione formale), un *automa* G è un oggetto rappresentato da un *grafo*, cioè da

- un insieme di *punti* (detti *nodi* del grafo), indicati da lettere maiuscole,
- un insieme di terne ordinate (X,a,Y), il cui primo e il terzo elemento sono nodi, dette *archi* del grafo,

nel quale è stato scelto un nodo, detto *nodo iniziale*.

6.3 DEDS e Automi/Esempio

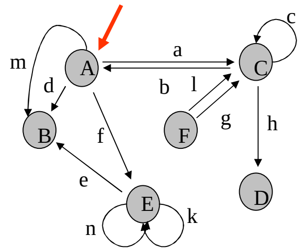
Esempio
Un automa a sei nodi G.
Si osservi che, nella rappresentazione grafica, si sono indicati gli archi con il solo elemento centrale della terna (es. (A,a,C) con a). Il punto iniziale A viene evidenziato con una freccia.



Definizione
In un automa G, due archi (X,a,Y) e (U,b,V) si dicono consecutivi se Y = U.
Un insieme di archi $\{(X_1,a_1,Y_1), (X_2, a_2,Y_2), \ldots, (X_n, a_n,Y_n)\}$ consecutivi si dice cammino; X_1 è detto punto iniziale del cammino e Y_n è detto punto finale.

6.4 DEDS e Automi

Se in un automa G pensiamo alle lettere che etichettano gli archi come alle *lettere* di un *alfabeto*, possiamo interpretare l'automa come un dispositivo per formare le *parole* di un *linguaggio*, associando ad ogni possibile cammino che parte dal punto iniziale la parola formata dalla sequenza ordinata di lettere che marcano gli archi costituenti il cammino.



Ad esempio, per l'automa G illustrato a fianco, avremo, nel linguaggio, le parole a; accb; fkne; ……..

Definizione

L'insieme L delle parole costruito a partire da un automa G come descritto sopra si chiama *linguaggio generato da G*.

6.5 DEDS e Automi

Dato un automa G, associamo ad ognuna delle lettere utilizzate per indicare gli archi di G un evento dell'insieme di eventi *E*. Questo ci permette di interpretare ogni parola del linguaggio L generato da G come una successione di eventi, cioè come un comportamento nell'universo $\Omega = E^T$, con T = {1,2,3,…}.

Diremo che l'automa G è una rappresentazione del DEDS Σ se $L = \Sigma \subseteq \Omega$.

Nel seguito, sulla base di quanto convenuto sopra, utilizzeremo automi e linguaggi generati da essi per maneggiare i DEDS e studiarne le proprietà.

6.6 DEDS e Automi/Modelli

In particolare, per costruire il modello Σ di un dato sistema S utilizzando un opportuno DEDS, detto *E* l'insieme degli eventi di interesse, occorrerà individuare tutti i possibili comportamenti di S e, successivamente, costruire un automa G tale che il linguaggio L da esso generato mediante le lettere dell'alfabeto E contenga tutti i comportamenti di S.

7.1 Sistemi lineari ARX

Definizione

Sia E l'insieme di eventi costituito dallo spazio vettoriale $\Re \times \Re$ e sia T = **Z** (insieme dei numeri relativi). Un sistema dinamico orientato $\Sigma \subseteq \Omega = E^T$ del tipo

$\Sigma = \{(y(t), u(t)) \in \Re \times \Re$ *tali che*

$$y(t) = a_1 y(t-1)+a_2 y(t-2)+\ldots+a_{na} y(t-na)+b_1 u(t-1)+b_2 u(t-2)+\ldots+b_{nb} u(t-nb) \quad (6.1)$$

per $t \in I \subseteq T\ \}$

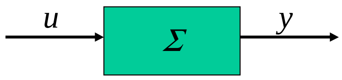
viene detto *sistema dinamico lineare (di tipo) ARX*.

Nota

Il nome ARX origina dalla contrazione di "Auto Regressivo con componente Esogena (Exogenous, in inglese)": nell'equazione 6.1 si chiama componente Auto Regressiva quella costituita dai termini in *y* e componente Esogena quella costituita dai termini in *u*.

7.2 Sistemi lineari ARX

Ricordiamo che schematicamente il sistema orientato Σ si rappresenta come



In termini di funzionamento, cioè di azione svolta, l'interpretazione che diamo di Σ è quella di un dispositivo che, stimolato, dal segnale di ingresso *u(t)* fornisce in risposta il segnale *y(t)*.

L'equazione 6.1

$$y(t) = a_1 y(t-1)+a_2 y(t-2)+\ldots+a_{na} y(t-na)+b_1 u(t-1)+b_2 u(t-2)+\ldots+b_{nb} u(t-nb) \quad (6.1)$$

asserisce che, in ogni comportamento di Σ, il valore dell'uscita *y* ad ogni istante *t*, cioè *y(t)*, è una combinazione lineare dei valori dell'uscita stessa negli *na* istanti che precedono *t* e dei valori dell'ingresso negli *nb* istanti che precedono *t*.

7.3 Sistemi lineari ARX

Se consideriamo il funzionamento del sistema ARX Σ sull'intervallo $I = [0,+\infty) \subseteq T$, l'utilizzo dell'equazione 6.1

$$y(t) = a_1 y(t-1)+a_2 y(t-2)+\ldots+a_{na} y(t-na)+b_1 u(t-1)+b_2 u(t-2)+\ldots+b_{nb} u(t-nb) \quad (6.1)$$

richiede di specificare alcuni valori di *y* e di *u* in istanti precedenti 0.

In tali situazioni sarà sempre sottointeso che

$$u(t) = 0 \text{ per ogni } t < 0 \qquad (6.2)$$

(ciò significa soltanto che non è stato fornito alcuno stimolo significativo al sistema prima dell'istante di inizio del funzionamento).

I valori y(-1), y(-2), …, y(-na) verranno detti condizioni iniziali all'istante 0 e rappresentano le condizioni nelle quali si trova il sistema in conseguenza di ciò che è accaduto prima dell'istante 0.

7.4 Sistemi lineari ARX

Nel seguito supporremo sempre che sia soddisfatta la seguente

Assunzione
Nell'equazione 6.1 si ha na $\geq$ nb.

L'indice na misura la memoria, e quindi la complessità, del sistema Σ descritto da 6.1.

Definizione
L'indice na viene detto ordine del sistema Σ descritto da 6.1.

Osserviamo che il dato y(-1), y(-2), …, y(-na) ha proprietà analoghe a quelle indicate per lo stato nel paragrafo 4.7. In particolare osserviamo che scelti arbitrariamente y(-1), y(-2), …, y(-na) e *u(t)* per $t \geq 0$, si ha in corrispondenza di questi un unico comportamento di Σ definito da 6.1.
Diremo pertanto che il dato y(-1), y(-2), …, y(-na) descrive lo stato del sistema Σ all'istante $t = 0$.

7.5 Sistemi lineari ARX

Evoluzione libera e forzata

Osserviamo che, dato un segnale di ingresso u(t) = f(t), $t \in [0,+\infty)$, e un insieme di condizioni iniziali $y(-1) = y_1, \dots y(-na) = y_{na}$, grazie alla struttura dell'equazione 6.1, possiamo suddividere il comportamento in uscita y(t), $t \in [0,+\infty)$, di Σ in due parti:

- una parte indicata con $y_L(t)$ e detta *risposta libera* calcolata mediante 6.1 ponendo

$$y(-1) = y_1, \dots y(-na) = y_{na} \text{ e } u(t) = 0 \text{ , } t \in [0,+\infty),$$

($y_L(t)$ descrive il comportamento in uscita di Σ quando l'ingresso è nullo)

- una parte indicata con $y_F(t)$ e detta *risposta forzata* calcolata mediante 6.1 ponendo

$$y(-1) = 0, \dots y(-na) = 0 \text{ e } u(t) = f(t) \text{ , } t \in [0,+\infty).$$

($y_F(t)$ descrive il comportamento in uscita di Σ quando la condizione iniziale è nulla)

Infatti, non è difficile verificare (come si fa?) che si ha

$$y(t) = y_L(t) + y_F(t)$$

7.6 Sistemi lineari ARX

Proposizione

Dato un sistema Σ definito da 6.1 e fissata la condizione iniziale y(-1) = y(-2) = … = y(-na) = 0, dette rispettivamente y'(t) e y"(t) le risposte relative a due qualsiasi ingressi u'(t) e u"(t), si ha per ogni a,b $\in \Re$ che la risposta y(t) relativa all'ingresso u(t) = au'(t) + bu"(t) verifica y(t) = ay'(t) + by"(t)

Dimostrazione. Lasciata per esercizio.

Quanto asserito dalla proposizione precedente rende ragione del termine "lineare" nella caratterizzazione dei sistemi che stiamo considerando: la risposta relativa alla condizione iniziale nulla e ad una combinazione lineare di ingressi è data dalla combinazione lineare, con gli stessi coefficienti, delle risposte relative ai singoli ingressi. In altri termini, la risposta forzata è lineare rispetto all'ingresso u(t).

(Si provi che la risposta libera è lineare rispetto alla condizione iniziale.)

7.7 Sistemi lineari ARX/Modelli

Per costruire un sistema dinamico Σ di tipo ARX che modelli un dato sistema fisico S, si può operare come segue:

a) si esegue un esperimento di funzionamento sul sistema S nell'intervallo [0,N-1], consistente nel fornire ad esso un ingresso *u(t)* e misurare la corrispondente risposta *y(t)*, in modo da ricavare il comportamento *c(t) = (u(t), y(t))*;

b) si fissa il grado di complessità del modello che si intende costuire, cioè si sceglie il valore dell'indice na che misura la lunghezza della parte AR, e si sceglie nb $\leq$ na;

c) si considera per ogni *t* la quantità $e(t) = y(t) - a_1 y(t-1) - \ldots - a_{na} y(t-na) - b_1 u(t-1) - \ldots - b_{nb} u(t-nb)$, nella quale i valori di *y* e di *u* sono quelli che costituiscono il comportamento *c(t)* e $\theta = (a_1, a_2, \ldots, a_{na}, b_1, b_2, \ldots, b_{nb})$ è un vettore di incognite;

d) si considera la funzione $J(\theta)$ definita da $J(\theta) = (1/N)\Sigma_t e^2(t)$ e si cerca il suo punto di minimo θmin .

7.8 Sistemi lineari ARX/Modelli

Osserviamo che $J(\theta min) = 0$ significa che il comportamento $c(t)$ appartiene al sistema ARX Σ definito dai valori $\theta min = (a_1, a_2,\dots, a_{na}, b_1, b_2,\dots, b_{nb})$. In altre parole, se $J(\theta min) = 0$, Σ è un modello di S, almeno per quanto riguarda ciò che possiamo dedurre su S dall'esito del nostro esperimento, cioè dall'informazione che $c(t)$ è un suo comportamento. Questa informazione può essere sufficiente a caratterizzare S se l'esperimento che ci ha condotto a determinare $c(t)$ è stato sufficientemente completo e esaustivo (in teoria, dovremmo dare ad S tutti i possibili ingressi e condurre l'osservazione delle uscite su [0, +∞)).

Nella realtà, non possiamo aspettarci che $J(\theta min) = 0$, ma si avrà $J(\theta min) = e > 0$. La quantità e prende il nome di errore (quadratico, medio) di modello e indica quanto fedelmente il sistema Σ modella le caratteristiche di S, almeno in riferimento all'esito del nostro esperimento.

8.1 Problematiche di controllo

Come abbiamo già accennato, disporre di un modello per un dato fenomeno, ci consente di predire il l'evoluzione futura del fenomeno o, più in generale, di analizzarne le caratteristiche.

Oltre a predire il comportamento di un fenomeno, siamo spesso interessati a governarlo, cioè a far si che in una data situazione esso esibisca, tra tutti i comportamenti possibili, solo quel comportamento (o eventualmente quei comportamenti) che soddisfano a determinate specifiche.

L'insieme delle azioni che ci consentono di governare un fenomeno prende il nome di azione di controllo. Se disponiamo di un modello del fenomeno, possiamo utilizzarlo per progettare e definire una azione di controllo adeguata allo scopo prefisso, cioè all'ottenimento di un comportamento che soddisfi le specifiche.

8.2 Problematiche di controllo

Esempio

Nel caso di un DEDS Σ, le specifiche riguardano di solito l'esclusione di determinati comportamenti che, per qualche ragione, vengono ritenuti indesiderabili.

L'azione di controllo, in tal caso, può esplicarsi attraverso l'inibizione dei comportamenti indesiderati.

Esempio

Nel caso di un sistema ARX Σ, le specifiche riguardano di solito le caratteristiche dell'uscita (ad esempio si vuole un ben preciso segnale in uscita, oppure si vuole che tutte le possibile uscite mostrino un andamento particolare).

L'azione di controllo, in tal caso, può esplicarsi attraverso la scelta di opportuni ingressi, che forzano il sistema a rispondere nel modo desiderato.

9.1 Architetture di controllo

L'azione di controllo può venire esercitata da un operatore umano o da un dispositivo che prende il nome di controllore.

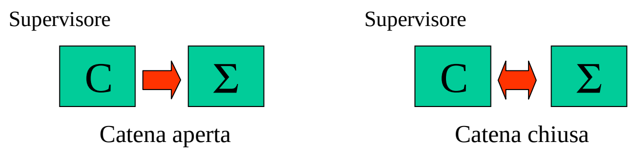
Quest'ultima è la situazione di interesse fondamentale per l'Automatica: quando l'azione di controllo viene esercitata da un dispositivo che non richiede l'intervento di un operatore umano, parliamo in effetti di controllo automatico.

Nell'architettura di una struttura costituita da un sistema (controllato) Σ e un controllore C, possiamo distinguere due situazioni di interesse:

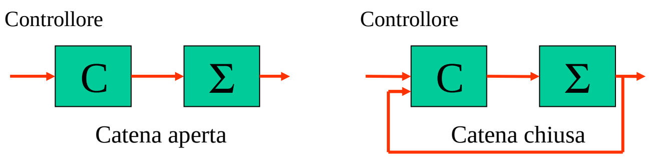
- nella prima situazione il controllore svolge la sua azione di controllo sulla base di informazioni e conoscenze possedute a priori e non è in grado di monitorare il suo effetto sul sistema controllato; parleremo in questo caso di controllo in catena aperta;
- nella seconda situazione il controllore svolge la sua azione di controllo sulla base di informazioni relative al contemporaneo funzionamento del sistema ed è quindi in grado di monitorare il suo effetto sul sistema controllato; parleremo in questo caso di controllo in catena chiusa.

9.2 Architetture di controllo

Architetture di controllo: DEDS



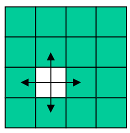
Architetture di controllo: sistemi lineari ARX



9.3 Architetture di controllo/Esempi

Esempio

Il gioco del 15:



si descriva con un DEDS (rappresentandolo con un automa) il comportamento di un giocatore.

(Suggerimento: indichiamo con A, B, D, S i possibili eventi costituiti dallo spostamento della casella vuota in Alto, in Basso, a Destra, a Sinistra e cominciamo a descrivere uno dei possibili comportamenti come cammino di un grafo che costruianmo via via. E' facilmente comprensibile che i nodi del grafo rappresenteranno la posizione della casella vuota, e pertanto possono essere indicati con (i,j), i = 1,2,3,4, j = 1,2,3,4.)

Si costruisca un supervisore che, tramite l'inibizione di alcuni eventi, lavorando in catena aperta, forzi il giocatore a portare la casella vuota in (1,1).

Si costruisca un supervisore che, tramite l'inibizione di alcuni eventi, lavorando in catena chiusa, forzi il giocatore a portare la casella vuota in (2,2).

9.2 Architetture di controllo/Esempi

Esempio

Dato il sistema lineare ARX di ordina 1 descritto da

$\Sigma 1 \equiv y(t) = 1/2y(t-1) + u(t-1)$

si descriva l'azione di un controllore che, lavorando in catena aperta, forza la risposta y(t) del sistema, qualunque sia la condizione iniziale, a tendere asintoticamente al valore 2.

Si provi ad ottenere lo stesso risultato per il sistema

$\Sigma 2 \equiv y(t) = y(t-1) + u(t-1)$.

Si costruisca un controllore che lavorando in catena chiusa forza la risposta ad assumere il valore costante 2 nel caso di entrambi i sistemi.