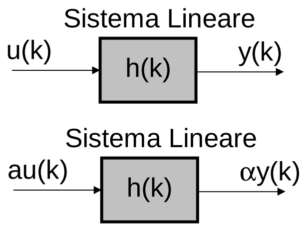
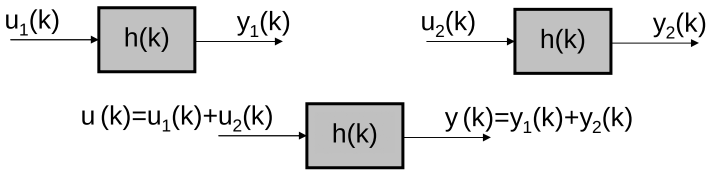
PROPRIETA' DEI SISTEMI TD
LINEARI STAZIONARI

LINEARITA'

La linearità si manifesta tramite il principio di sovrapposizione degli effetti



con a=costante



PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE

Se un dato sistema TD lineare riceve in ingresso $u_1(k)$ e $u_2(k)$ separatamente e risponde, rispettivamente con $y_1(k)$ e $y_2(k)$, allora la sua risposta ad un ingresso

$$u(k) = a_1u_1(k) + a_2u_2(k)$$

Vale

$$y(k) = a_1y_1(k) + a_2y_2(k)$$

$$a_1, a_2 = \text{cost.}$$

STAZIONARIETA'

Un dato sistema TD è stazionario se

$a_0, \dots , a_n, \quad b_0, \dots , b_m$

in

$y(k) = b_0u(k) + b_1u(k-1) + \dots + b_mu(k-m) - a_1y(k-1) - \dots - a_n\, y(k-n)$

sono costanti indipendenti da k

Poiché y(k) può esprimersi anche come:

$$y(k) = \sum_{i=0}^{\infty} h(i)u(k-i)$$

Se il sistema è stazionario, applicando ad esso lo stesso ingresso semplicemente fatto scorrere nel tempo di p passi, ossia

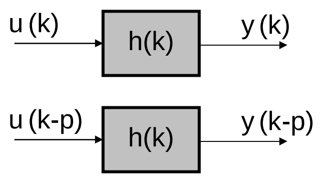
$$u^*(k) = u(k-p)$$

si constata che

$$y^*(k) = \sum_{i=0}^{\infty} h(i)u^*(k-i) = \sum_{i=0}^{\infty} h(i)u(k-p-i)$$

$$\Downarrow$$

$$y^*(k) = y(k-p)$$



Le proprietà di linearità e stazionarietà giustificano la denominazione di ingressi canonici dati ad alcune classi di segnali di test.
Questi sono

- Segnali che opportunamente combinati fra quelli della stessa classe danno luogo ad un segnale risultante di forma qualunque

- Almeno un segnale appartenente alla classe produca come uscita la sequenza dei pesi del sistema o una funzione da cui questa sequenza di pesi può essere immediatamente ricavata.

Tramite l'applicazione di segnali canonici si può quindi prevedere il comportamento del sistema in risposta ad un ingresso qualunque.

Inoltre parametri caratteristici della risposta a segnali canonici possono costituire una misura convenzionale delle prestazioni del sistema

Sono proprio queste considerazioni che hanno guidato nella definizione di criteri operativi di analisi di sistemi TD lineari e stazionari.

I segnali usati come segnali canonici sono:

- Il delta di Kronecker TD, la risposta al quale è esattamente h(k)
- Il gradino unitario $u(k) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad k < 0 \\ 1 & \text{se} \quad k \geq 0 \end{cases}$

  la risposta al quale è $y(k) = \sum_{i=0}^{k} h(i)$

- I polinomi fattoriali canonici $u(k) = \dfrac{h^{(k)}}{k!}$

RISPOSTA AL GRADINO UNITARIO

E' utile notare che la risposta al gradino unitario gode della proprietà

$$y(k)-y(k-1) = y(k) \qquad k=0,1,2,\ldots$$
$$y(-1) = 0$$

Per tutti i sistemi che contengono elementi dissipativi (che tengono conto di attriti e, in generale, trasformazioni di energia con rendimento <1) ossia per tutti i sistemi che rappresentano dispositivi fisici è in generale vero che

$$h(k)>0 \qquad \forall k$$
$$h(k) \to 0 \qquad k \to \infty$$

Può accadere che gli h(k) tendono a 0 in modo non monotono. Ciò determina un andamento pseudo oscillatorio (smorzato).

Se invece tendono a zero in modo monotono è evidente che y(k) tende ad un valore costante, in modo monotono anch'essa.

Il sistema manifesta un comportamento instabile se non è verificata la condizione $h(k) \to 0$ se $k \to \infty$.

La risposta al gradino permette di dare una definizione formale e quantitativa di alcune prestazioni desiderate dai sistemi di controllo TD.

Nel caso di risposta forzata, cioè ottenuta sotto l'applicazione di un ingresso che si prolunga nel tempo, ci si aspetta che un sistema generi una risposta che, almeno asintoticamennte, tenda a seguire l'andamento dell'ingresso in modo proporzionale.

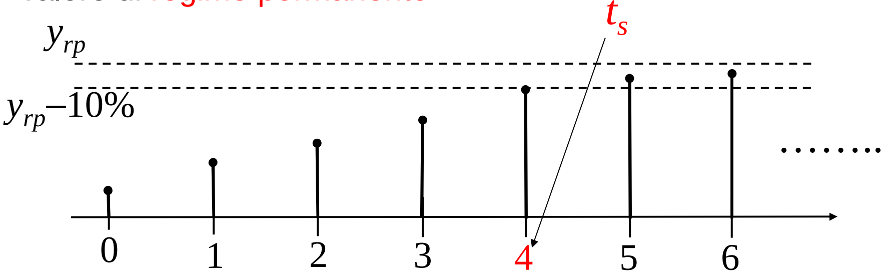
Questo è un aspetto cruciale nei sistemi di controllo il cui comportamento desiderato è in genere proporzionale all'ingresso.

La misura di quanto bene questa caratteristica è soddisfatta è denominata fedeltà di risposta.

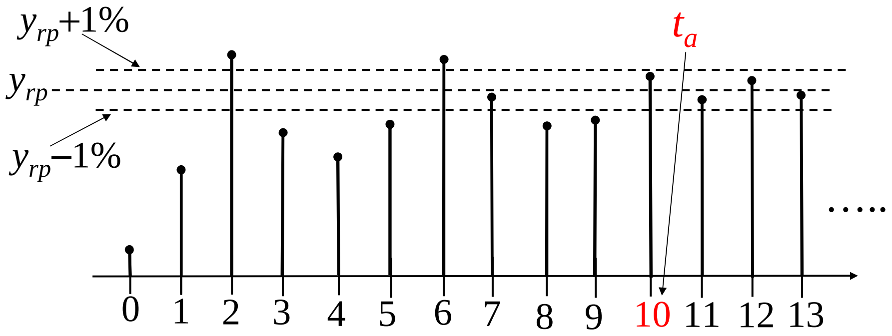
E' intuitivamente comprensibile che un sistema di controllo avrà prestazioni tanto migliori quanto più velocemente l'uscita diventerà permanentemente proporzionale all'ingresso entro prescritte tolleranze.

- Nella risposta a gradino si possono individuare dei parametri che costituiscono una misura grossolana ma efficace di quanto velocemente la risposta forzata arrivi ad essere proporzionale all'ingresso, entro prescritte tolleranze:

  - Tempo di salita (t_s): è il numero di passi necessari perché la risposta al gradino raggiunga il 90% del valore cui tende asintoticamente. Se quest'ultimo valore esiste, viene detto valore di regime permanente.



•Tempo di assestamento (t_a) all'x%: è il numero di passi richiesti affinché la risposta al gradino si situi definitivamente entro una fascia di tolleranza pari all'x% del valore di regime permanente. Frequentemente tale fascia di tolleranza è assegnata al $\pm 1\%$.



OSSERVAZIONI

•Il sistema, nel caso di risposta a gradino unitaria, raggiunge il valore di regime permanente quando $h(k)$ va a zero.

•Quindi, ci va tanto più velocemente, quanto più velocemente $h(k)$ va a zero.

SISTEMI INTERCONNESSI

•Nei problemi di automatica (di controllo automatico), si ha in generale a che fare con sistemi interconnessi.

•Le strutture fondamentali di interconnessione sono:

- ✓in serie;
- ✓in parallelo;
- ✓in controreazione.

•Se si interconnettono sistemi lineari e stazionari, con tali strutture di interconnessione si ottengono sistemi lineari e stazionari.

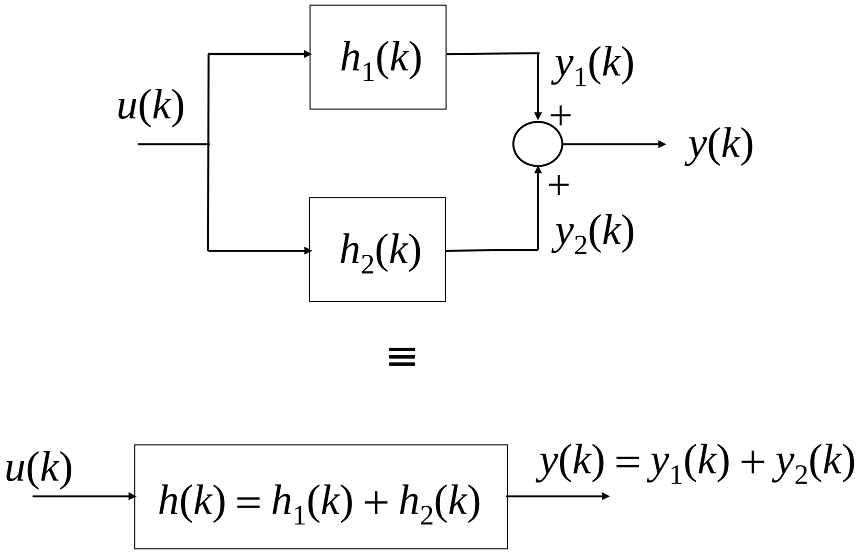
•Quindi saranno essi stessi modellati da una serie di coefficienti che entrano nel relativo modello con somma di convoluzione:

$$y(k) = \sum_{i=0}^{+\infty} h(i)u(k-i)$$

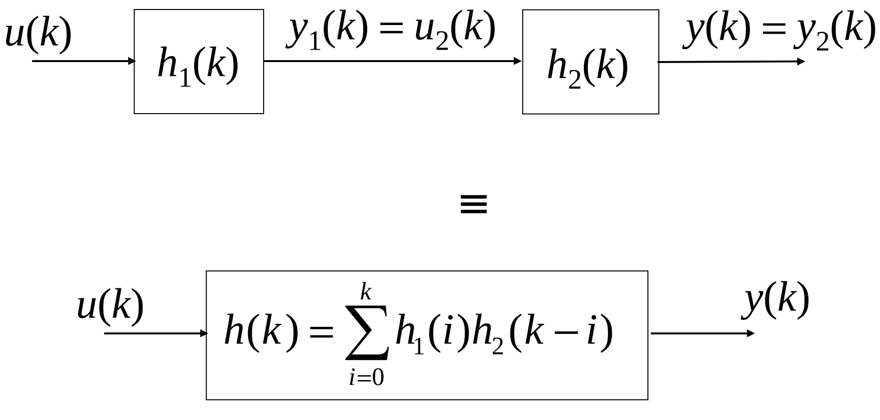
•È utile comprendere allora come la sequenza di pesi del sistema interconnesso sia legata alle sequenze dei pesi dei sistemi componenti.

•Si hanno i seguenti risultati:

CONNESSIONE IN PARALLELO



CONNESSIONE IN SERIE O IN CASCATA



•Infatti, usando ancora come ingresso $u(k) = \delta(k)$ (risposta impulsiva), si ha:

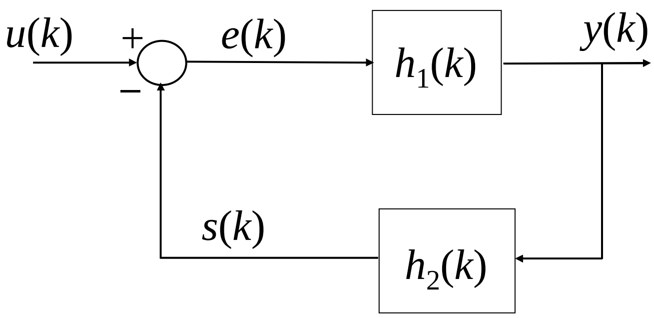
$y_1(k) = h_1(k)$ e, poiché $u_2(k) = y_1(k)$, si ottiene:

$$y_2(k) = \sum_{i=0}^{+\infty} h_2(i) u_2(k-i) = \sum_{i=0}^{k} h_2(i) h_1(k-i)$$

perché $h_2(i)$ è nulla per $i < 0$.

•Invertendo la sequenza di sistemi connessi in cascata, il risultato non cambia (per effetto della stazionarietà).

CONNESSIONE IN CONTROREAZIONE



$$s(k) = \sum_{i=1}^{+\infty} h_2(i) y(k-i)$$

$$e(k) = u(k) - s(k)$$

$$y(k) = \sum_{i=0}^{+\infty} h_1(i) e(k-i)$$

•$h_2(k)$ deve pesare solo i campioni precedenti di $y(k)$, e non anche quello attuale (oppure $h_1(0) = 0$).

•Questa è una condizione necessaria perché il sistema a controreazione sia fisicamente implementabile.

•Il fatto è che, se così non fosse, per calcolare un qualunque valore all'istante k di una grandezza nell'anello, dovremmo già conoscere il valore di quella stessa grandezza all'istante k.

•Per poter studiare compiutamente la configurazione a controreazione, abbiamo bisogno del modello costituito dalle funzioni di trasferimento, per cui occorre lo strumento costituito dalla trasformata *z* e dalla sua antitrasformata.

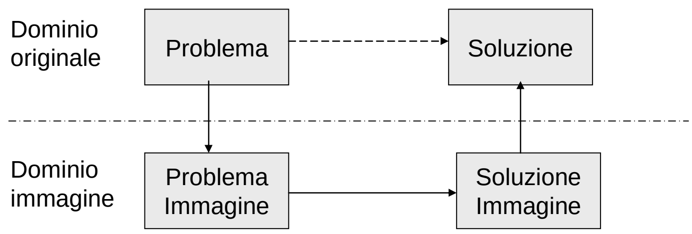
INTRODUZIONE

- Modalità di rappresentazione dei sistemi TD viste (equazioni alle differenze, somma di convoluzione con risposta impulsiva) non particolarmente efficaci per gli scopi di uso dei modelli matematici nell'automatica

- Mancanza di strumenti compatti e sistematici per lo studio di modelli di sistemi di ordine anche modesto (≥2)

- Strumenti matematici adatti: tecniche di trasformazione, ovvero tecniche con cui si cambia il dominio di definizione dei segnali di interesse e delle relazioni funzionali tra essi.

- Si trasforma il problema originale (previsione del comportamento di un sistema lineare stazionario TD in termini di risposta ad uno stimolo a partire da condizioni iniziali note) in un problema immagine definito su un dominio diverso dal tempo
- Si cerca la soluzione del problema immagine nel dominio immagine
- Si trasforma la soluzione trovata nel dominio immagine nella corrispondente soluzione nel dominio di partenza



La scelta di un tale percorso ha senso solo se risulta vantaggiosa dai seguenti punti di vista:

1. Semplicità di calcolo della soluzione immagine originale e del passaggio da essa alla soluzione del problema

2. Possibilità di riconoscere facilmente e direttamente caratteristiche e proprietà del problema e delle soluzioni nel dominio immagine

La trasformata Z gode di ambedue le proprietà:

- Soluzione ricavabile da semplici operazioni algebriche
- Identificazione rapida di proprietà del sistema in studio

RICHIAMI SUI NUMERI COMPLESSI

Un numero complesso z è un numero che può essere espresso nella forma

$$z = x+jy$$

Dove $x, y \in \Re$ $\qquad j = \sqrt{-1}$

$x = Re(z) =$ parte reale di z

$y = Im(z) =$ parte immaginaria di z

Due numeri complessi sono uguali quando hanno rispettivamente uguali le loro parti reali ed immaginarie

OPERAZIONI ELEMENTARI CON NUMERI COMPLESSI

Dati due numeri complessi generici

$$z_1 = x_1 + jy_1 \qquad z_2 = x_2 + jy_2$$

- **SOMMA**

$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + j(y_1 + y_2)$ (analogia con somma vettoriale)

- **DIFFERENZA**

$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + j(y_1 - y_2)$ (analogia con differenza vettoriale)

- **PRODOTTO**

$z_1 z_2 = (x_1 + jy_1)(x_2 + jy_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + j(x_1 y_2 + x_2 y_1)$

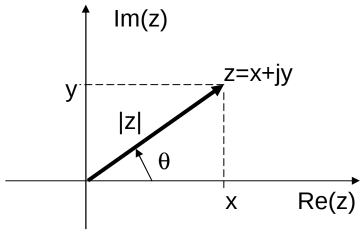
avendo tenuto conto che $j^2 = -1$

- **DIVISIONE**

$$\frac{z_1}{z_2} = \left(\frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}\right) + j\left(\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}\right)$$

RAPPRESENTAZIONE GEOMETRICA

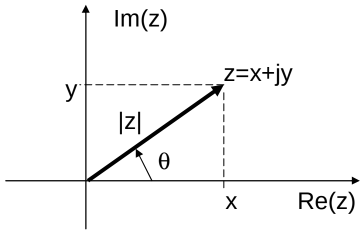
si associa il numero complesso z = x+jy con il punto (x,y) del piano complesso di ascissa Re(z) e ordinata Im(z)



- Ad ogni numero complesso z = x+jy è associato un punto del piano complesso
- Ad ogni numero complesso z = x+jy è associato un vettore che va dall'origine fino al punto (x,y) con
  - ampiezza (modulo) $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$
  - angolo (fase) $\tan\theta = \frac{y}{x}$

IDENTITA' DI EULERO

Dalla rappresentazione geometrica dei numeri complessi



si deducono le seguenti relazioni tra: parte reale x, parte immaginaria y del numero complesso e modulo |z| e fase θ del vettore che ne resta individuato:

$$x = |z| \cos\theta, \qquad y = |z| \sin\theta$$

da cui $z = |z| \{\cos\theta + j\sin\theta\}$

per il termine $\cos\theta + j\sin\theta$ è usuale la notazione

$$\mathbf{e^{j\theta} := \cos\theta + j\sin\theta} = \text{identità di Eulero}$$

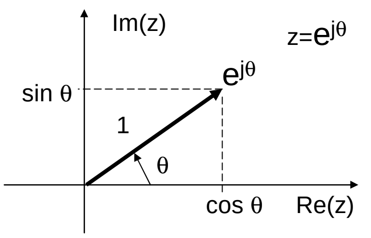
RAPPRESENTAZIONE POLARE

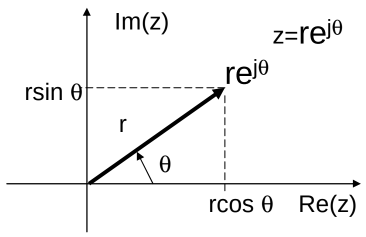
Usando l'identità di Eulero è possibile dare una nuova formulazione dei numeri complessi,

considerando che:

- $e^{j\theta}$=vettore di lunghezza unitaria e fase θ

$z=|z|\, e^{j\theta}=r\, e^{j\theta}$= rappresentazione polare





E' preferibile usare la rappresentazione polare dei numeri complessi quando si devono effettuare operazioni di prodotto e divisione di numeri complessi

ESEMPIO

dati due numeri complessi

$$z_1= |z_1|\{\cos\theta_1+j\sin\theta_1\} = |z_1|e^{j\theta_1}$$

$$z_2= |z_2|\{\cos\theta_2+j\sin\theta_2\} = |z_2|e^{j\theta_2}$$

si può facilmente dimostrare che

$$z_1 z_2 = |z_1||z_2|\, e^{j(\theta_1+\theta_2)}$$

$$z_1/z_2 = (|z_1|/|z_2|)\, e^{j(\theta_1-\theta_2)}$$

da tali relazioni si deduce la seguente proprietà trigonometrica

$$\mathbf{e^{j\theta_1} e^{j(\pm\theta_2)} = e^{j(\theta_1\pm\theta_2)}}$$

PRINCIPALI FUNZIONI DI VARIABILE COMPLESSA

Una funzione di variabile complessa, rappresentata come F(.), è una funzione definita nell'insieme dei numeri complessi a valori in quello stesso insieme.

FUNZIONE COMPLESSO CONIUGATO

dato il numero complesso : $z = x+jy = |z|e^{j\theta}$

si definisce valore complesso coniugato di z il valore

$$\mathbf{z^*} = F(z) := Re(z) - j\,Im(z) = x - jy$$

PROPRIETA'

$$z = x+jy\,, \quad z^* = x-jy$$

$$|z| = \sqrt{(z)(z^*)}$$

$$Re(z) = \frac{1}{2}(z+z^*)$$

$$Im(z) = \frac{1}{2j}(z-z^*)$$

FUNZIONE ESPONENZIALE COMPLESSO

dato il numero complesso : $z = x+jy$

si definisce esponenziale complesso di z il valore

$$\mathbf{e^z} = F(z) := e^x e^{jy}$$

TRASFORMATA Z

DEFINIZIONE

La trasformata Z di una sequenza di numeri f(k) identicamente nulla per tempo discreto negativo k<0 (sequenza fisica) è definita da:

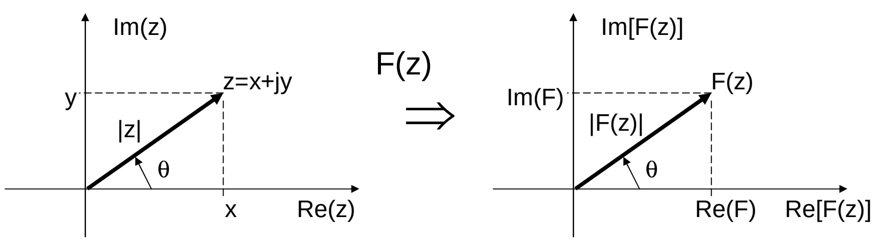
$$Z[f(k)] := F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k) z^{-k}$$

$$Z[f(k)] := F(z) = f(0) + \frac{f(1)}{z} + \frac{f(2)}{z^2} + ...$$

Dove z è un numero complesso denominato “variabile complessa” (z=a+jb, $j = \sqrt{-1}$)

La trasformata z è una funzione di variabile complessa

- F(z) può essere calcolata valutando il numero complesso generato dalla sommatoria precedente nel caso in cui tale sommatoria converge.
- F(z) risulta essere non definita in z_0 se la sommatoria, valutata in $z = z_0$, non converge.



DEFINIZIONE

L'insieme di valori di z nel piano complesso per cui F(z) è definita si chiama "regione di convergenza" della funzione F(z)

DEFINIZIONE

L'insieme di valori di z nel piano complesso per cui F(z) non è definita si chiama "regione di divergenza" della funzione F(z)

NOTA

Le due regioni sono in genere l'una il complemento dell'altra rispetto all'intero piano z

ESEMPIO

Per calcolare

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k) z^{-k}$$

È utile imparare a manipolare la sequenza geometrica

$$f(k) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad k < 0 \\ \alpha^k & \text{se} \quad k \geq 0 \end{cases}$$

In tal caso

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} (\alpha \cdot z^{-1})^k$$

Considerando la versione di F(z) troncata ad n termini si ha

$$F_n(z) = 1 + a_1 z^{-1} + \ldots + a_{n-1} z^{n-1}$$

$$F(z) = \lim_{n \to \infty} F_n(z)$$

È già noto che

$$\sum_{i=0}^{k} \alpha^i = \frac{1-\alpha^{k+1}}{1-\alpha}, \quad \alpha \neq 1$$

Perciò

$$F_n(z) = \frac{1-(\alpha \cdot z^{-1})^n}{1-\alpha \cdot z^{-1}}, \quad \alpha \neq 1$$

posto

$$\alpha \cdot z^{-1} = \left|\alpha \cdot z^{-1}\right| e^{j\theta} \qquad \theta = \text{fase di } (az^{-1})$$

Si constata

$$(\alpha \cdot z^{-1})^n = \left|\alpha \cdot z^{-1}\right|^n e^{jn\theta}$$

Allora, per quei valori di z per cui: $|az^{-1}|<1$, si ha:

$$F(z) = \lim_{n\to\infty} F_n(z) = \frac{1}{1-az^{-1}}\ ; \qquad \left|az^{-1}\right| < 1$$

Moltiplicando numeratore e denominatore per z si ha:

$$F(z) = \frac{z}{z-a}\ ; \qquad \left|az^{-1}\right| < 1$$

Invece, per quei valori di z per cui: $|az^{-1}|>1$, $(az^{-1})^n$ diverge per $n\to\infty$. Quindi:

$$\lim_{n\to\infty} F_n(z) = \infty; \qquad \left|az^{-1}\right| > 1$$

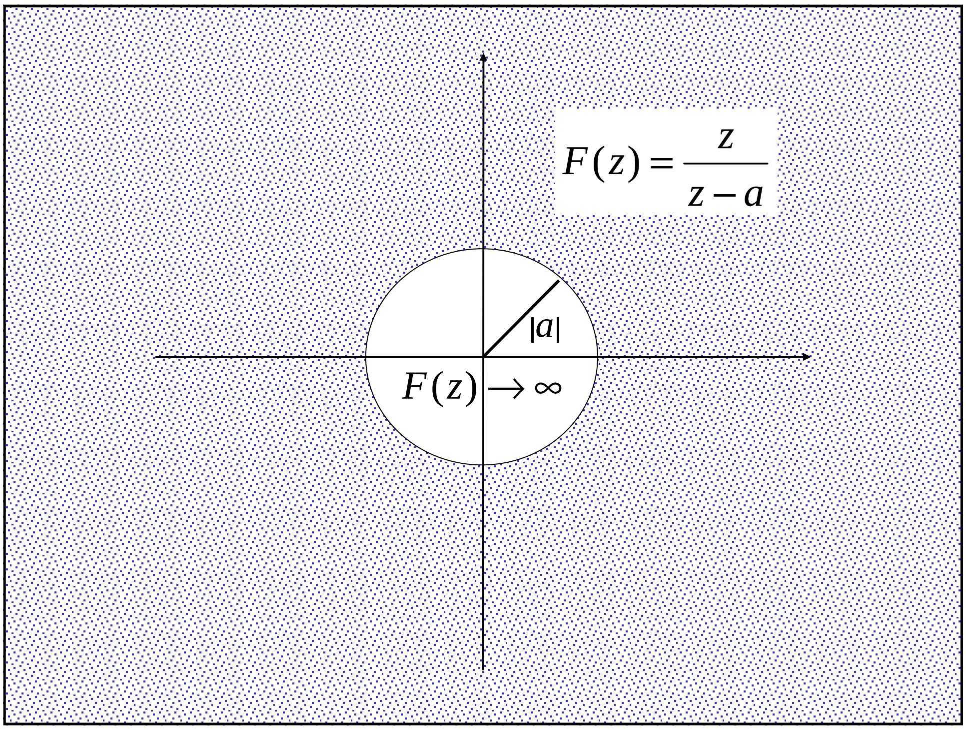
Usando manipolazioni elementari sui numeri complessi, si ottiene:

$$\left|az^{-1}\right| < 1 \Leftrightarrow |z| > |a|; \qquad \left|az^{-1}\right| > 1 \Leftrightarrow |z| < |a|$$

Riassumendo quindi:

$$Z(a^k) = \sum_{k=0}^{\infty} a^k \cdot z^{-k} = \begin{cases} \dfrac{z}{z-a} & \text{se } |z| > a \\ \text{illimitata} & \text{se } |z| < a \end{cases}$$

La regione di convergenza della serie geometrica è perciò l'esterno del cerchio di raggio $|a|$ nel piano z:



•Sulla circonferenza che separa la regione di convergenza da quella di divergenza la trasformata z della sequenza geometrica può convergere, oppure no.

•Occorre fare specifiche prove per i valori di z che appartengono a questo confine.

•Ad esempio, per $z = a$, si ottiene:

$$F_n(a) = \sum_{k=0}^{n-1} a^k \cdot z^{-k} \Big|_{z=a} = \sum_{k=0}^{n-1} a^k \cdot a^{-k} = 1+1+.....+1 = n$$

che è illimitato per $n \to \infty$. Quindi $z=a$ appartiene alla regione di divergenza della trasformata z di a^k.

Si può mostrare che: $Z(a^k) = \sum_{k=0}^{\infty} a^k \cdot z^{-k} = \begin{cases} \dfrac{z}{z-a} & \text{se } |z| > a \\ \text{illimitata} & \text{se } |z| < a \end{cases}$

anche effettuando la divisione: $\dfrac{z}{z-a}$

$$\begin{array}{l|l}
z & z-a \\ \cline{2-2}
-z \quad +a & \\ \hline
a & 1 + az^{-1} + a^2 z^{-2} + a^3 z^{-3} + \ldots \\
-a + a^2 z^{-1} & \\ \hline
a^2 z^{-1} & \\
-a^2 z^{-1} + a^3 z^{-2} & \\ \hline
a^3 z^{-2} & \\
-a^3 z^{-2} + a^4 z^{-3} & \\ \hline
a^4 z^{-3} &
\end{array}$$

Si noti infatti che il resto dopo n divisioni è $a^n z^{-n+1}$, che tende a zero per $n \to \infty$ solo se $|az^{-1}| < 1$.

Trasformata z della sequenza unitaria (gradino)

$$f(k)=\begin{cases}0 & se \quad k<0\\ 1 & se \quad k\geq 0\end{cases}$$

$$F(z)=\sum_{k=0}^{\infty}1\cdot z^{-k}=1+z^{-1}+z^{-2}+.....$$

È un caso particolare della sequenza geometrica, con a=1.
Quindi:

$$\mathrm{F(z)}=\begin{cases}\dfrac{\mathrm{z}}{\mathrm{z}-1} & \mathrm{se} \quad |\mathrm{z}|>1\\ \mathrm{nondefinita} & \mathrm{se} \quad |\mathrm{z}|<1\end{cases}$$

Trasformata z di una sequenza pseudo-geometrica

$$f(k)=\begin{cases}1 & se \quad k=0,1,\ldots,15\\ 2^k & se \quad k\geq 16\end{cases}$$

$$F(z)=\sum_{k=0}^{15}1\cdot z^{-k}+\sum_{k=16}^{\infty}2^k\cdot z^{-k}=$$

$$=\sum_{k=0}^{15}1\cdot z^{-k}+\sum_{k=0}^{\infty}2^k\cdot z^{-k}-\sum_{k=0}^{15}2^k\cdot z^{-k}=$$

$$=\frac{z^{16}-1}{z^{15}(z-1)}+\frac{z}{z-2}-\frac{z^{16}-2^{16}}{z^{15}(z-2)}$$

Il primo ed il terzo addendo convergono $\forall z\neq 0$, il secondo per $|z|>2 \Rightarrow F(z)$ converge per $|z|>2$.

ZERI E POLI DELLA TRASFORMATA Z

•Si è visto che la trasformata z di una sequenza geometrica è esprimibile come il rapporto di due polinomi nella variabile z. Nel seguito considereremo solo situazioni dello stesso tipo, nelle quali, cioè, la trasformata z è una funzione razionale.

•Si consideri quindi:

$$F(z) = \frac{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \ldots + b_m}{z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n}$$

•I polinomi a numeratore e a denominatore, se di essi si conoscono le radici, possono essere scritti in forma fattorizzata:

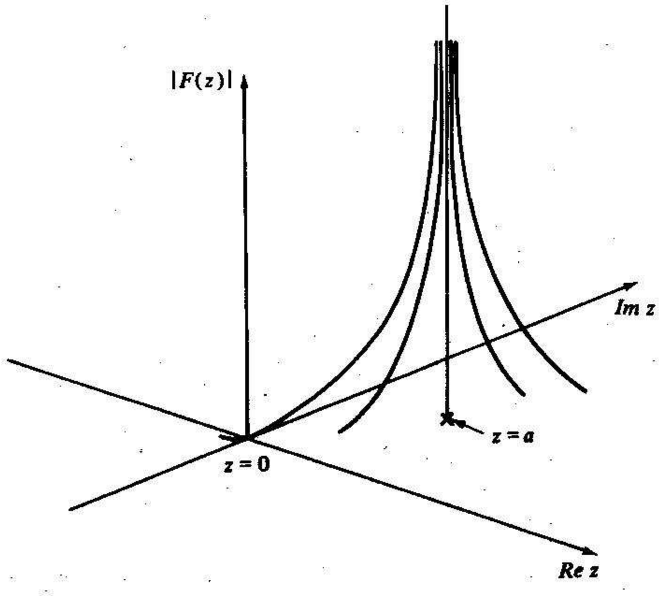
$$F(z) = \frac{b_0 (z - z_1)(z - z_2)\ldots(z - z_m)}{(z - p_1)(z - p_2)\ldots(z - p_n)}$$

•Per $z = z_1$, $z = z_2$, …, $z = z_m$, si ha: $F(z)=0$. Le radici del numeratore $z_1, z_2, \ldots, z_m$ si dicono zeri di $F(z)$.

•Per $z = p_1$, $z = p_2$, …, $z = p_n$, $F(z)$ non è definita. Le radici del denominatore $p_1, p_2, \ldots, p_n$ si dicono poli di $F(z)$.

•Esempio:

$$F(z) = \frac{z}{(z - a)}$$

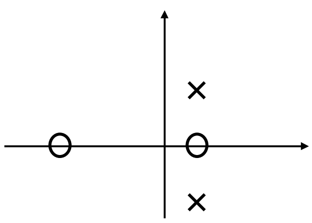


•I poli e gli zeri di una trasformata z contengono tutta l'informazione essenziale relativa ad $F(z)$.

• Quindi la loro posizione nel piano z ha un ruolo importante nell'analisi della $F(z)$.

•Esempio: $F(z) = \dfrac{z^2 + 2z - 3}{z^3 - 2z^2 + 5z} = \dfrac{(z-1)(z+3)}{z(z-1-2j)(z-1+2j)}$

Indicando i poli con '**X**' e gli zeri con '**O**', si ha:



REGIONE DI CONVERGENZA

•Nell'esempio precedente la regione di convergenza è delimitata dalla circonferenza che passa per i due poli complessi coniugati.

•In generale, una trasformata z che può essere scritta come rapporto di due polinomi avrà uno dei suoi poli sul confine della regione di convergenza.

•Questo polo è sempre quello più lontano dall'origine del piano z.

•Si può dimostrare che:

•Data la funzione: $$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k) \cdot z^{-k}$$
la sua regione di convergenza è sempre definita come:

$$|z| > R$$

dove il raggio di convergenza R dipende dalla sequenza f(k) che genera F(z).

•Se $R = 0$, la trasformata zeta converge in tutto il piano z, tranne, eventualmente, che nell'origine.

•Se R è finito, la trasformata zeta converge al di fuori di un cerchio di raggio R centrato nell'origine.

•Se R è infinito, la trasformata zeta diverge ovunque.

Nota: una serie di potenze può essere differenziata qualunque numero di volte nella sua regione di convergenza, e le derivate rimangono convergenti in quella regione.

•È utile avere tabelle di coppie:

sequenze generatrici $\leftrightarrow$ trasformate z

in particolare per sequenze ottenute dal campionamento di segnali continui.

Tabella delle trasformate z

	$f(k)$ for $k \geq 0$	$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k) z^{-k}$	Raggio di convergenza ***R***
1	1	$\frac{z}{z-1}$	1
2	a^k	$\frac{z}{z-a}$	$\|a\|$
3	k	$\frac{z}{(z-1)^2}$	1
4	k^2	$\frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$	1
5	k^3	$\frac{z(z^2+4z+1)}{(z-1)^4}$	1
6	$\frac{a^k}{k!}$	$e^{a/z}$	0
7	$\sin k\omega T$	$\frac{z \sin \omega T}{z^2 - 2z\cos\omega T + 1}$	1
8	$\cos k\omega T$	$\frac{z(z - \cos\omega T)}{z^2 - 2z\cos\omega T + 1}$	1
9	$a^k \sin k\omega T$	$\frac{az \sin\omega T}{z^2 - 2az\cos\omega T + a^2}$	$\|a\|$
10	$a^k \cos k\omega T$	$\frac{z(z - a\cos\omega T)}{z^2 - 2az\cos\omega T + a^2}$	$\|a\|$
11	ka^k	$\frac{az}{(z-a)^2}$	$\|a\|$
12	$k^2 a^k$	$\frac{az(z+a)}{(z-a)^3}$	$\|a\|$
13	$k^3 a^k$	$\frac{az(z^2+4az+a^2)}{(z-a)^4}$	$\|a\|$
14	$\delta(k)$	1	0
15	$\delta(k-m)$	z^{-m}	0

Tabella delle trasformate z di segnali campionati

	$f(t)$ $t \geq 0$	$f(kT)$ $k \geq 0$	$F(z)$ $F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)z^{-k}$	Raggio di convergenza *R* $\lvert z \rvert > R$
1	1	1	$\frac{z}{z-1}$	1
2	t	kT	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$	1
3	t^2	$(kT)^2$	$\frac{T^2 z(z+1)}{(z-1)^3}$	1
4	t^3	$(kT)^3$	$\frac{T^3 z(z^2+4z+1)}{(z-1)^4}$	1
5	e^{-at}	e^{-akT}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$	$\lvert e^{-aT} \rvert$
6	te^{-at}	kTe^{-akT}	$\frac{zTe^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$	$\lvert e^{-aT} \rvert$
7	t^2e^{-at}	$(kT)^2e^{-akT}$	$\frac{T^2e^{-aT}z(z+e^{-aT})}{(z-e^{-aT})^3}$	$\lvert e^{-aT} \rvert$
8	$\sin \omega t$	$\sin k\omega T$	$\frac{z \sin \omega T}{z^2 - 2z \cos \omega T + 1}$	1
9	$\cos \omega t$	$\cos k\omega T$	$\frac{z(z - \cos \omega T)}{z^2 - 2z \cos \omega T + 1}$	1