PROPRIETÀ DELLA Z TRASFORMATA

Linearità

f(k) = af1(k) + b f2(k)   k = 0, 1, 2, …

a, b costanti

$$F(z) = a\sum_{k=0}^{\infty} f_1(k)z^{-k} + b\sum_{k=0}^{\infty} f_2(k)z^{-k} \qquad |z| > \max(R_1, R_2)$$

$$= aF_1(z) + bF_2(z) \qquad |z| > \max(R_1, R_2)$$

NB

- È molto utile per trovare tramite opportune manipolazioni la Z-trasformata di una data sequenza;
  - Le opportune manipolazioni consistono nella decomposizione di una sequenza complessa in sequenze più semplici, le cui Z-trasformate sono note

Scorrimento a destra

- Sia il segnale f(k) identicamente nullo per k<0
- Sia esso applicato ad un sistema composto di m ritardi unitari in cascata. La risposta del sistema è:

$$y(k) = f(k-m) \qquad k = 0,1,2,\ldots$$

$$Y(z) = \sum_{k=0}^{\infty} y(k)z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} f(k-m)z^{-k}$$

$$= \mathrm{z}^{-\mathrm{m}}\left[\mathrm{f}(0)+\mathrm{f}(1)\mathrm{z}^{-1}+\ldots+\mathrm{f}(\mathrm{n})\mathrm{z}^{-1}+\ldots\right]$$

$$= \mathrm{z}^{-\mathrm{m}}F(z) \qquad |z| > R$$

ossia

$$Z\,[f(k-m)] = z^{-m}F(z), \qquad |z|>R$$

m qualunque intero ≥0

NB: la proprietà vale solo per f(k) identicamente nulla per k<0

➢ Ne seguono importanti vantaggi per analizzare sistemi lineari a tempo discreto

PE

$$y(k) = \beta u(k) + \alpha y(k-1) \quad k = 0,1,2,....$$
$$Z[y(k)] = \beta Z[u(k)] + \alpha Z[y(k-1)]$$
$$Y(z) = \beta u(z) + \alpha z^{-1} Y(z)$$

$$Y(z) = \left(\frac{\beta}{1-\alpha z^{-1}}\right) U(z) = \left(\frac{\beta z}{z-a}\right) U(z)$$

Assunzione implicita $y(-1) = 0$

$\left(\frac{\beta z}{z-\alpha}\right)$ rappresenta il modo in cui l'ingresso u(z) si trasferisce in uscita.

➢ Rappresenta quindi la cosiddetta **Funzione di Trasferimento** del sistema.

- Una volta che essa sia nota permette di calcolare la risposta ad una qualunque sequenza di ingresso, di cui si possa definire la trasformata z.

PE

Nel nostro caso se il segnale di ingresso è il gradino unitario campionato si ha:

$$u(z) = \frac{z}{z-1}$$

$$\Downarrow$$

$$Y(z) = \left(\frac{\beta z}{z-\alpha}\right)\frac{z}{z-1} = \frac{\beta z^2}{(z-\alpha)(z-1)}$$

A questo punto se siamo capaci di trovare la sequenza y(k) corrispondente ad Y(z) abbiamo **risolto il problema del calcolo della risposta**.

Proprietà di convoluzione

- Sappiamo che

  y(k) = h(0)u(k) + h(1)u(k-1) + h(2) u(k-2) + …

  dove h(i) è la sequenza dei pesi caratteristica del sistema.

- Nel caso che tutte le sequenze considerate siano identicamente nulle per k<0

$$\begin{aligned}
Y(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} y(k) z^{-k} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \{h(0)u(k) + h(1)u(k-1) + \ldots\} z^{-k} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} h(0)u(k) z^{-k} + \sum_{k=0}^{\infty} h(1)u(k-1) z^{-k} + \ldots \\
&= h(0)\sum_{k=0}^{\infty} u(k) z^{-k} + h(1)\sum_{k=0}^{\infty} u(k-1) z^{-k} + \ldots
\end{aligned}$$

Poichè

$Z[u(k-m)] = z^{-m}U(z)$ $m \geq 0$ e sequenze $u(k)$ identicamente per $k<0$

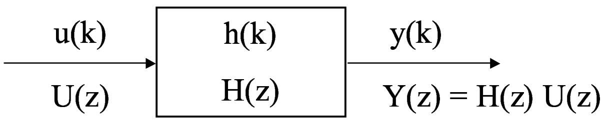
➪

$Y(z) = h(0)u(z) + h(1)z^{-1}U(z) + h(2)z^{-2}\,U(z) + \ldots$

$= \{h(0) + h(1)z^{-1} + \ldots\}\,U(z)$

$= H(z)U(z)$

con $H(z) = Z[h(z)]$



Esempi importanti di tale proprietà si hanno per:

- **Risposta al delta di Kronecker**

$u(k) = \delta(k) \Rightarrow U(z) = 1 \Rightarrow Y(z) = H(z)$

- **Risposta al gradino unitario**

$$U(z) = \frac{z}{z-1} \qquad |z| > 1$$

$$Y(z) = H(z)\frac{z}{z-1} \qquad |z| > 1$$

$$= H(z)\frac{1}{1-z^{-1}}$$

$$Y(z) - z^{-1}Y(z) = H(z)$$

$$y(k) - y(k-1) = h(k)$$

Esempio

Sia ancora

$$y(k) = \beta\, u(k) + \alpha\, y(k-1)$$

$$h(k) = \begin{cases} 0 & k < 0 \\ \beta\alpha^k & k \geq 0 \end{cases}$$

$$H(z) = \frac{\beta z}{z - \alpha} \qquad |z| > |\alpha|$$

Se $u(z) = \frac{z}{z-1} \qquad |z| > 1$

dalla proprietà di convoluzione segue

$$Y(z) = H(z)U(z) = \left(\frac{\beta z}{z-\alpha}\right)\left(\frac{z}{z-1}\right)$$

che è lo stesso risultato di prima trovato per altra via

ALTRE PROPRIETÀ DELLA TRASFORMATA Z

Scorrimento a sinistra

Sia f(k) una sequenza data

Sia $g(k) = \begin{cases} 0 & k < 0 \\ f(k+1) & k \geq 0 \end{cases}$

$$G(z) = \sum_{k=0}^{\infty} g(k) z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} f(k+1) z^{-k}$$

$$= f(1) z^{-0} + f(2) z^{-1} + \ldots$$

$$z^{-1} G(z) = f(1) z^{-1} + f(2) z^{-2} + \ldots$$

$$z^{-1} G(z) + f(0) = F(z) \qquad |z| > R$$

$$G(z) = Z[f(k+1)]$$

$$Z[f(k+1)] = zF(z) - zf(0)$$

ed in generale

$$Z[f(k+m)] = z^m F(z) - \sum_{k=0}^{m-1} f(k) z^{m-k} \qquad |z| > R$$

Proprietà di somma finita

Sia $g(k)=\sum_{i=0}^{k} f(i) \qquad k=0,1,2,\ldots$

$g(k)-g(k-1)=f(k) \quad k>0$

$g(-1)=0 \;\Rightarrow\; \mathrm{g}(0)=f(0)$

$$F(0)=\sum_{k=0}^{\infty} f(k)z^{-k} \qquad |z|>R$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}[g(k)-g(k-1)]z^{-k}$$

$$=G(z)-z^{-1}G(z)$$

$$F(z)=G(z)(1-z^{-1})=G(z)(1-\frac{1}{z})$$

$$=G(z)\frac{z-1}{z}, \qquad |z|>\max(1,R)$$

$$G(z)=\frac{z}{z-1}F(z), \qquad |z|>\max(1,R)$$

Moltiplicazione per α^K

Sia $g(k)=\alpha^k f(k) \qquad k\geq 0$

$$Z[f(k)]=F(z) \qquad |z|>R$$

$$Z[g(k)]=Z[\alpha^k f(k)]=\sum_{k=0}^{\infty}\alpha^k f(k)z^{-k}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty} f(k)[\alpha^{-1}z]^{-k}$$

$$=F(\alpha^{-1}z) \qquad |\alpha^{-1}z|>R$$

$$Z[\alpha^k f(k)]=F(\alpha^{-1}z), \qquad |z|>|\alpha|R$$

Teorema del valore iniziale

$$F(z) = f(0) + f(1)z^{-1} + f(2)z^{-2}$$

$$\Downarrow$$

$$f(0) = \lim_{|z|\to\infty} F(z)$$

Teorema del valore finale

- Determinare il comportamento di f(k) per $k\to\infty$
  - Se F(z) ha poli fuori del cerchio unitario verificheremo che f(k) per $k\to\infty$ è illimitato
  - Ci limitiamo a considerare il caso che (z-1)F(z) è analitica per $|z|\geq 1$ (ossia non ha poli nella regione di convergenza)
- Sotto questa ipotesi

$$g(k) = f(k+1) - f(k)$$

$$G(z) = Z[f(k+1) - f(k)] = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N} [f(k+1) - f(k)]z^{-k}$$

- Usando lo scorrimento a sinistra

$$zF(z) - zf(0) - F(z) = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N} [f(k-1) - f(k)] z^{-k}$$

per $z \to 1$

$$\lim_{z\to 1} [(z-1)F(z) - zf(0)] = \lim_{z\to 1} [\lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N} [f(k+1) - f(k)] z^{-k}]$$

$$= \lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N} [f(k+1) - f(k)]$$

$$= f(\infty) - f(0)$$

$$\Downarrow$$

$$f(\infty) = \lim_{z\to 1} (z-1)F(z) \qquad per \quad f(0) = 0$$

Sequenze periodiche

- f(k)=f(k+N)

$$F_1(z) = \sum_{k=0}^{N-1} f(k) z^{-k}$$

$$F(z) = \left(\frac{z^N}{z^N - 1} \right) F_1(z) \qquad |z| > 1$$

$$|z^{-N}| < 1$$