INTRODUZIONE

- Per rendere efficace il passaggio dal problema originale al problema immagine occorre vedere come attuare il passaggio dalla soluzione immagine alla soluzione del problema originale.
- Vedere come si realizza la trasformata Z inversa ed imparare ad eseguirla

PROBLEMA : Data F(z) determinare f(k)

$$\mathbf{f(k) = Z^{-1}[F(z)]}$$

Metodi disponibili:

- Espansione frazioni parziali
- Divisione diretta tra polinomi

ESPANSIONE IN FRAZIONI PARZIALI

- E' il metodo più semplice da usare quando la Z-trasformata è scritta in modo da mettere in esplicita evidenza le radici dei polinomi in z che compongono la funzione F(z).
- Nel caso contrario è necessario calcolare preliminarmente tali radici

NOTA

Possono generarsi complicazioni analitiche superabili con tecniche grafo-numeriche o con soluzioni numeriche, tipo Newton-Raphson che sono oggi parte integrante di numerose librerie matematiche anche implementate su PC

L'approccio con espansione di frazioni parziali sarà introdotto facendo riferimento ad un semplice esempio.

ESEMPIO

Sia dato il sistema descritto dall'equazione alle differenze del primo ordine

$$y(k) = \beta u(k)+\alpha y(k-1)$$

La cui risposta ad un gradino unitario risulta essere

$$Y(z) = \frac{\beta \cdot z^2}{(z-\alpha)(z-1)}$$

Si può pensare di decomporre Y(z) in una somma di termini, ciascuno dotato di sequenze generatrici note

$$Y(z) = \frac{\beta \cdot z^2}{(z-\alpha)(z-1)} = A + B\frac{z}{z-\alpha} + C\frac{z}{z-1}$$

Dove

1	$\leftrightarrow$	$\delta(k)$	
$z/(z-\alpha)$	$\leftrightarrow$	α^k,	k=0,1,2,….

Si tratta allora di calcolare i valori di A, B, C.

Una volta calcolati tali valori è evidente, per la linearità del sistema, che

$$y(k) = A\delta(k) + B\alpha^k + C(1)^k, \qquad k = 0,1,2,....$$

Le procedure per il calcolo di A, B, C possono essere di tre tipi.

Ciascuna porterà allo stesso risultato ovvero:

$$A = 0, \quad B = \frac{\alpha\beta}{1-\alpha}, \quad C = \frac{\beta}{1-\alpha}$$

PROCEDURA 1

$$Y(z) = \frac{\beta \cdot z^2}{(z-\alpha)(z-1)} = A + B\frac{z}{z-\alpha} + C\frac{z}{z-1} =$$

$$= \frac{A(z-\alpha)(z-1) + B(z-1)z + C(z-\alpha)z}{(z-\alpha)(z-1)} =$$

$$= \frac{Az^2 - Az - A\alpha z + A\alpha + Bz^2 - Bz + Cz^2 - C\alpha z}{(z-\alpha)(z-1)} =$$

$$= \frac{z^2(A+B+C) + z(-A\alpha - C\alpha - B - A) + A\alpha}{(z-\alpha)(z-1)} =$$

Da tale equazione segue il sistema di equazioni

$$
\begin{cases}
\beta = \mathrm{A} + \mathrm{B} + \mathrm{C} \\
0 = -\mathrm{A}\alpha - \mathrm{C}\alpha - \mathrm{B} - \mathrm{A} \\
0 = \mathrm{A}\alpha
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
\mathrm{B} = \beta - \mathrm{C} \\
0 = -\mathrm{C}\alpha - \mathrm{B} \\
\mathrm{A} = 0
\end{cases}
$$

Da cui risulta

$$0 = -\mathrm{C}\alpha - \beta + \mathrm{C} = -\beta + \mathrm{C}(1\text{-}\alpha) \quad \Rightarrow \quad \mathrm{C} = \frac{\beta}{1-\alpha}$$

$$\mathrm{B} = \beta - \mathrm{C} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{B} = \frac{\alpha\beta}{1-\alpha}$$

$$\mathrm{A} = 0$$

Seconda procedura

$$\frac{\beta z^2}{(z-\alpha)(z-1)} = a + b\left(\frac{z}{z-\alpha}\right) + c\left(\frac{z}{z-1}\right)$$

Deve essere vera per qualunque z, quindi anche per

$$z = 0 \qquad 0 = a$$

$$z = -1 \qquad -\frac{\beta}{2(1+\alpha)} = a - \frac{b}{(-1-\alpha)} - \frac{c}{2}$$

$$z = 2 \qquad \frac{4\beta}{(2\text{-}\alpha)1} = a + \left(\frac{2}{2-\alpha}\right)b + \frac{2c}{1}$$

$$
1) \quad \begin{cases}
\dfrac{\beta}{2(1+\alpha)} = \dfrac{b}{(1+\alpha)} + \dfrac{c}{2} \\
\dfrac{4\beta}{2\text{-}\alpha} = \dfrac{2b}{2-\alpha} + 2c
\end{cases}
$$

Risolvendo il sistema 1): $a = 0, \quad b = \dfrac{\beta\alpha}{\alpha\text{-}1}, \quad c = \dfrac{\beta}{1\text{-}\alpha}$

Terza procedura

$$\frac{\beta z^2}{(z-\alpha)(z-1)} = a + b\left(\frac{z}{z-\alpha}\right) + c\left(\frac{z}{z-1}\right)$$

- Le due procedure precedenti richiedono sempre di risolvere un sistema di equazioni in più incognite
- È perciò raccomandato **usare la seguente procedura**
  - Per z=0 a=0
  - Se ora moltiplichiamo tutti e due i membri della equazione per

$$\left(\frac{z-\alpha}{z}\right)$$

si ha

$$\frac{\beta z^2}{(z-\alpha)(z-1)}\frac{(z-\alpha)}{z} = 0\frac{(z-\alpha)}{z} + b + c\frac{z}{z-1}\frac{(z-\alpha)}{z} \Rightarrow \frac{\beta z}{z-1} = b + c\frac{z-\alpha}{z-1}$$

- z=α $\Rightarrow$ $b = \frac{\beta\alpha}{\alpha - 1}$

- Se ora moltiplichiamo per

$$\left(\frac{z-1}{z}\right)$$

si ha

$$\frac{\beta z^2}{(z-\alpha)(z-1)}\frac{(z-1)}{z} = 0\frac{(z-1)}{z} + b\frac{z}{z-\alpha}\frac{(z-1)}{z} + c$$

- per z=1 $\Rightarrow$ $\frac{\beta}{1-\alpha} = c$

Questa procedura viene denominata calcolo dei residui

GENERALIZZAZIONE DELLA ESPANSIONE IN FRAZIONI PARZIALI

$$F(z) = \frac{b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \ldots + b_n}{z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n}$$

- Siano $p_1, p_2, \ldots, p_n$ le radici di

$$z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n = 0 \qquad (\alpha)$$

  - si dicono **poli**;
  - la equazione (α) viene detta **equazione caratteristica**;

- Per il momento assumiamo $p_i \neq 0$, $\quad i = 1, 2, \ldots, n$

- Quindi se tutti i **poli** p_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ sono **distinti**:

$$F(z) = \frac{b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \ldots + b_n}{(z-p_1)(z-p_2)\ldots(z-p_n)}$$

$$= \alpha_0 + \alpha_1 \left(\frac{z}{z-p_1} \right) + \ldots + \alpha_n \left(\frac{z}{z-p_n} \right)$$

α_i := RESIDUI

$i = 0, 1, \ldots, n$

e quindi

$$\alpha_0 = F(z)\big|_{z=0} = \frac{b_n}{(-p_1)(-p_2)\ldots(-p_n)}$$

$$\alpha_1 = \frac{(z-p_i)}{z} F(z)\bigg|_{z=0} \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

e quindi

$$f(k) = \alpha_0 \delta(k) + \alpha_1 (p_1)^k + \ldots + \alpha_n (p_n)^k \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

- Se ci sono **poli multipli**:

$$F(z)=\frac{b_0z^n+b_1z^{n-1}+\ldots+b_n}{(z-p_1)^{n_1}(z-p_2)^{n_2}\ldots(z-p_r)^{n_r}}$$

$$n_1+n_2+\ldots+n_r=n$$

allora

$$F(z)=\alpha_0+\frac{\alpha_1 z}{(z-p_1)}+\frac{\alpha_2 z^2}{(z-p_1)^2}+\ldots+\frac{\alpha_{n_1} z^{n_1}}{(z-p_1)^{n_1}}$$

$$+\frac{\beta_1 z}{(z-p_2)}+\frac{\beta_2 z^2}{(z-p_2)^2}+\ldots+\frac{\beta_{n_2} z^{n_2}}{(z-p_2)^{n_2}}+\ldots$$

$$\ldots+\frac{\xi_1 z}{(z-p_r)}+\ldots+\frac{\xi_{n_r} z^{n_r}}{(z-p_r)^{n_r}}$$

Con l'aiuto della seguente tabella:

Termini Elementari $F(z)$	$f(k)$ per $k=0,1,2,\ldots$
$\frac{z}{(z-a)}$	a^k
$\frac{z^2}{(z-a)^2}$	$(k+1)a^k$
$\frac{z^3}{(z-a)^3}$	$\frac{(k+1)(k+2)}{2!}a^k$
$\frac{z^4}{(z-a)^4}$	$\frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3!}a^k$
$\frac{z^5}{(z-a)^5}$	$\frac{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}{4!}a^k$

si ottengono facilmente le sequenze generatrici di ciascuno dei termini della decomposizione in frazioni parziali

Esempio

Determinare l'antitrasformata z della funzione:

$$F(z)=\frac{z\sin(\omega T)}{z^2-[2\cos(\omega T)]z+1}$$

Si riscriva $F(z)$ nella forma:

$$F(z)=\frac{z\sin(\omega T)}{\left(z-e^{j\omega T}\right)\left(z-e^{-j\omega T}\right)}$$

Si ha:

$$\frac{z\sin(\omega T)}{\left(z-e^{j\omega T}\right)\left(z-e^{-j\omega T}\right)}=\alpha_1\frac{z}{z-e^{j\omega T}}+\alpha_2\frac{z}{z-e^{-j\omega T}}$$

con:

$$\alpha_1=\frac{1}{2j}\ ;\ \alpha_2=\alpha_1^*=\frac{-1}{2j}$$

Quindi:

$$F(z)=\frac{1}{2j}\left(\frac{z}{z-e^{j\omega T}}\right)-\frac{1}{2j}\left(\frac{z}{z-e^{-j\omega T}}\right)$$

Da cui:

$$f(k)=\frac{1}{2j}\left(e^{j\omega T}\right)^k-\frac{1}{2j}\left(e^{-j\omega T}\right)^k=\sin(k\omega T)\ ,\ k=0,1,....$$