Esempio

Utilizzando il metodo dei fratti semplici, calcolare l'antitrasformata della funzione:

$$F(z) = \frac{z^3 + 2z^2 + z + 1}{z^3 - z^2 - 8z + 12}$$

Si fattorizzi il denominatore di F(z):

$$z^3 - z^2 - 8z + 12 = (z-2)^2(z+3)$$

Si ha perciò:

$$\frac{z^3 + 2z^2 + z + 1}{z^3 - z^2 - 8z + 12} = \alpha_0 + \alpha_1 \frac{z}{z-2} + \alpha_2 \frac{z^2}{(z-2)^2} + \beta_1 \frac{z}{z+3} =$$

$$= \frac{(\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \beta_1)z^3 + (-\alpha_0 + \alpha_1 + 3\alpha_2 - 4\beta_1)z^2}{(z-2)^2(z+3)} +$$

$$+ \frac{(-8\alpha_0 - 6\alpha_1 + 4\beta_1)z + 12\alpha_0}{(z-2)^2(z+3)}$$

Eguagliando i numeratori si ottiene il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \beta_1 = 1 \\ -\alpha_0 + \alpha_1 + 3\alpha_2 - 4\beta_1 = 2 \\ -8\alpha_0 - 6\alpha_1 + 4\beta_1 = 1 \\ 12\alpha_0 = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\alpha_0 = \frac{1}{12}\ ;\ \alpha_1 = -\frac{9}{50}\ ;\ \alpha_2 = \frac{19}{20};\ \beta_1 = \frac{11}{75}\ .$$

$$F(z) = \frac{1}{12} - \frac{9}{50}\frac{z}{z-2} + \frac{19}{20}\frac{z^2}{(z-2)^2} + \frac{11}{75}\frac{z}{z+3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(k) = \frac{1}{12}\delta(k) - \frac{9}{50}2^k + \frac{19}{20}(k+1)2^k + \frac{11}{75}(-3)^k$$

Data la funzione:

$$F(z) = \frac{b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \ldots + b_n}{(z-p_1)^{n_1}(z-p_2)^{n_2}\ldots(z-p_r)^{n_r}}$$

$$n_1 + n_2 + \ldots + n_r = n$$

esiste sempre lo sviluppo:

$$F(z) = \alpha_0 + \frac{\alpha_1 z}{(z-p_1)} + \frac{\alpha_2 z^2}{(z-p_1)^2} + \ldots + \frac{\alpha_{n_1} z^{n_1}}{(z-p_1)^{n_1}}$$

$$+ \frac{\beta_1 z}{(z-p_2)} + \frac{\beta_2 z^2}{(z-p_2)^2} + \ldots + \frac{\beta_{n_2} z^{n_2}}{(z-p_2)^{n_2}} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{\xi_1 z}{(z-p_r)} + \ldots + \frac{\xi_{n_r} z^{n_r}}{(z-p_r)^{n_r}}$$

➢Infatti, mettendo a denominatore comune lo sviluppo in fratti semplici, si ottiene:

$$F(z)=\frac{c_0 z^n + c_1 z^{n-1} + \ldots + c_n}{(z-p_1)^{n_1}(z-p_2)^{n_2}\ldots(z-p_1)^{n_q}}$$

in cui i parametri c_i dipendono dagli (n+1) coefficienti α_0, α_1, α_2, …., ξ_{nq}, che devono essere scelti in modo che: $c_i = b_i$., i=0,1,…,n.

➢Si hanno quindi n+1 equazioni (linearmente indipendenti tra loro, per costruzione) in (n+1) incognite ⇒ la soluzione esiste sempre.

Metodo della divisione diretta

•Ricordiamo che, data f(k), per definizione:

$$Z[f(k)] := F(z) = f(0) + \frac{f(1)}{z} + \frac{f(2)}{z^2} + \ldots..$$

•Quando occorre trovare solo un numero limitato di termini di f(k) può essere efficace operare direttamente la divisione dei polinomi che compongono F(z). Ad esempio:

Esempio

$$F(z) = \frac{z^3 + 2z^2 + z + 1}{z^3 - z^2 - 8z + 12}$$

$$\begin{array}{l|l}
z^3 + 2z^2 + z + 1 & z^3 - z^2 - 8z + 12 \\ \cline{2-2}
z^3 - z^2 - 8z + 12 & 1 + 3z^{-1} + 12z^{-2} + 25z^{-3} + \dots \\ \hline
3z^2 + 9z - 11 & \\
3z^2 - 3z - 24 + 36z^{-1} & \\ \hline
12z + 13 - 36z^{-1} & \\
12z - 12 - 96z^{-1} + 144z^{-2} & \\ \hline
25 + 60z^{-1} - 144z^{-2} &
\end{array}$$

$$F(z) = 1 + 3z^{-1} + 12z^{-2} + 25z^{-3} + \dots$$