RAPPRESENTAZIONE CON LO STATO

La rappresentazione con somma di convoluzione di un sistema a tempo discreto equivale alla sua rappresentazione con equazione alle differenze per condizioni iniziali nulle. Lo stesso avviene per la rappresentazione con funzioni di trasferimento in Z.

In generale, le condizioni iniziali possono non essere nulle e occorre tener conto del valore che assumono per determinare la soluzione di un'equazione alle differenze di ordine *n*.

Le condizioni iniziali associate ad una equazione alla differenza contengono l'informazione sullo stato del sistema all'istante 0.

2.1 Definizione

Dato un sistema orientato

$$\Sigma = \{(u(t),y(t),x(t)),\ P(u(t),y(t),x(t)) = VERO\} \subseteq \Omega = U^I \times Y^I \times X^I$$

con *u* variabile di ingresso e *y* variabile di uscita, la variabile *x* è detta *stato* di Σ se, dati due comportamenti

$$c(t) = (u(t),y(t),x(t)) \in \Sigma \qquad c'(t) = (u'(t),y'(t),x'(t)) \in \Sigma$$

per ogni $t_0 \in T$, si ha che

a) $x(t_0) = x'(t_0)$ implica che il comportamento $c''(t)$ definito da $c''(t) = c(t)$ per $t < t_0$ e $c''(t) = c'(t)$ per $t \geq t_0$ appertiene a Σ;

b) $x(t_0) = x'(t_0)$ e $u(t) = u'(t)$ per $t \geq t_0$, implica $c(t) = c'(t)$ per $t > t_0$.

4.1 Proposizione (Proprietà dello stato)

Dato un sistema orientato

$$\Sigma = \{(u(t),y(t),x(t)),\ P(u(t),y(t),x(t)) = VERO\} \subseteq \Omega = U^I \times Y^I \times X^I$$

con ingresso *u*, uscita *y* e stato *x*, si ha che, in ogni comportamento $c(t) = (u(t),y(t),x(t)) \in \Sigma$ e per ogni $t_0 \in T$, l'uscita $y(t)$ per $t > t_0$ è determinata da $x(t_0)$ e $u(t)$ per $t \geq t_0$.

I sistemi lineari a tempo discreto che abbiamo preso in considerazione fino ad ora si rappresentano, qualora si utilizzino variabili di stato, con equazioni della forma

$$\textbf{(1)} \quad \begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \qquad x(0) = x_0 \\ y(k) &= Cx(k) + Du(k) \end{aligned}$$

(rappresentazione implicita)

L'insieme di stato X costituisce uno spazio vettoriale, che supporremo di dimensione finita, cioè $X = R^n$. Quindi:

$\mathbf{X} = R^n$; $\mathbf{dim}(X) = n$

$\mathbf{U} = R^m$; $\mathbf{dim}(U) = m$ (noi ci limiteremo ad $m = 1$)

$\mathbf{Y} = R^p$; $\mathbf{dim}(Y) = p$ (noi ci limiteremo a $p = 1$)

Con tali rappresentazioni siamo in grado di risolvere facilmente il seguente fondamentale problema:

Problema Date le condizioni iniziali $x(0) = x_0$ e l'ingresso $u(k)$, $k \geq 0$ calcolare $x(k)$ e $y(k)$, per ogni $k \geq 0$.

A tale scopo, infatti, è sufficiente applicare iterativamente la prima delle (1)

Ad esempio:

$$x(k) = A\,x(k-1) + B\,u(k-1) =$$

$$= A\,[\underbrace{A\,x(k-2) + B\,u(k-2)}_{x(k-1)}] + B\,u(k-1) =$$

$$= A^2\,x(k-2) + A\,B\,u(k-2) + B\,u(k-1)$$

Iterando più volte la procedura si arriva alla:

$x(k) = A^k x(0) + A^{k-1} B\, u(0) + A^{k-2} B\, u(1) + \ldots$

$\ldots + A\, B\, u(k-2) + B\, u(k-1)$

che in forma compatta può essere scritta come:

$$x(k) = A^k x(0) + \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-i-1} B u(i)$$

Per quanto riguarda y(k) si ha quindi:

$$y(k) = CA^k x(0) + \sum_{i=0}^{k-1} CA^{k-i-1} B u(i) + Du(k)$$

$$x(k) = A^k x(0) + \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-i-1} B u(i)$$

Risposta libera

(dipendente dalle sole condizioni iniziali)

Risposta forzata

(dipendente dal solo ingresso).

$$y(k) = CA^k x(0) + \overbrace{\sum_{i=0}^{k-1} CA^{k-i-1} B u(i) + Du(k)}$$

- La **risposta libera** è rappresentata, nel caso lineare e stazionario, da

$$x_l(k) = \Phi(k)x_0 \ (= \Phi(k-k_0)x(k_0) \text{ se listante iniziale è } k_0)$$

$$y_l(k) = C\Phi(k)x_0 = \Psi(k)x_0$$

dove $\Phi(k)$, $\Psi(k)$ sono matrici dette di transizione di stato e di risposta libera.

- La **risposta forzata**, sempre nel caso lineare stazionario, è rappresentata da

$$x_f(k) = \sum_{i=0}^{k-1} H(k-i)u(i) = \sum_{i=1}^{k+1} H(i)u(k-i)$$

$$y_f(k) = \sum_{i=0}^{k-1} CH(k-i)u(i) = \sum_{i=0}^{k-1} W(k-i)u(i)$$

dove i secondi membri sono somme di convoluzione, di cui le successioni di matrici $H(\cdot)$, $W(.)$ vengono dette nuclei. Si può ricavare il nucleo utilizzando come ingresso il delta di Kronecker.

- Esiste un legame assai importante fra matrice di transizione di stato e nucleo dato dalle **proprietà di composizione**

  - Nel caso di sistemi lineari e stazionari si ha:

$$H(k) = \Phi(k\text{-}i)\, H(i) \qquad 0 < i < k$$

- La rappresentazione con matrice di transizione e nucleo coincide con quella implicita quando si considera l'evoluzione dello stato ad un passo:

$$x(k+1) = \Phi(k)\, x(k) + \Psi(k)\, u(k)$$

con $A \equiv \Phi(k)$ e $B \equiv \Psi(k)$

$$\Phi(k) = A^k$$

$$\Psi(k) = C\Phi(k) = CA^k$$

$$H(k) = \begin{cases} 0 & k = 0 \\ A^{k-1}B & k \neq 0 \end{cases}$$

$$W(k) = \begin{cases} D & k = 0 \\ CA^{k-1}B & k \neq 0 \end{cases}$$

H(k): matrice delle risposte impulsive nello stato, nucleo della $\sum$ di convoluzione

W(k): matrice delle risposte impulsive in uscita

LEGAME TRA RAPPRESENTAZIONI ARX E RAPPRESENTAZIONI CON LO STATO

$y(k) = a_1 y(k-1) + a_2 y(k-2) + \ldots + a_n y(k-n) +$

$\quad b_1 u(k-1) + b_2 u(k-2) + \ldots + b_n u(k-n)$

Z-trasformando si ottiene

$(1 - a_1 z^{-1} - \ldots - a_n z^{-n}) Y(k) = (b_1 z^{-1} + \ldots + b_n z^{-n}) U(k)$

$$Y(z) = \frac{b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \ldots + b_n z^{-n}}{1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2} + \ldots + a_n z^{-n}} U(z) =$$

$$= \frac{b_1 z^{n-1} + b_2 z^{n-2} + \ldots + b_n}{z^n - a_1 z^{n-1} - a_2 z^{n-2} + \ldots + a_n} U(z)$$

LEGAME TRA RAPPRESENTAZIONI ARX E RAPPRESENTAZIONI CON LO STATO

$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$

$y(k) = Cx(k)$ Z-trasformando si

$zX(z) = AX(z) + Bu(z) + [zx(0)]$

$Y(z) = CX(z)$ ovvero

$(zI-A)X(z) = Bu(z) + [zx(0)]$

$Y(z) = CX(z)$ e quindi

$X(z) = (zI-A)^{-1}Bu(z) + [z(zI-A)^{-1}x(0)]$

$Y(z) = C(zI-A)^{-1}BX(z) + [zC(zI-A)^{-1}x(0)]$

LEGAME TRA RAPPRESENTAZIONI ARX E RAPPRESENTAZIONI CON LO STATO

$y(k)= a_1y(k-1) + a_2y(k-2) + \ldots.. + a_ny(k-n) +$

$b_1u(k-1) + b_2u(k-2) + \ldots.. + b_nu(k-n)$

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$$
$$y(k) = Cx(k) + Du(k)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_n & a_{n-1} & \ldots & \ldots & \ldots & a_1 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} b_n & b_{n-1} & \ldots & \ldots & \ldots & b_1 \end{bmatrix}$$

$$\frac{b_1z^{n-1} + b_2 z^{n-2} + \ldots.. + b_n}{z^n - a_1z^{n-1} - a_2 z^{n-2} + \ldots.. + a_n} = C(zI - A)^{-1}B$$

$$C(zI-A)^{-1}B = C(zI - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_n & a_{n-1} & \dots & \dots & \dots & a_1 \end{bmatrix})^{-1}B = C\begin{bmatrix} z & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & z & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & z & -1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \dots & \dots & \dots & z-a_1 \end{bmatrix}^{-1} B =$$

$$2[b_n \quad b_{n-1} \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad b_1]\frac{1}{\det(zI-A)}\begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & z \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & z^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & z^{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & z^{n-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{b_{n-1}z^{n-1} + b_{n-2}z^{n-2} + \dots + b_1}{z^n - a_{n-1}z^{n-1} - a_{n-2}z^{n-2} - \dots - a_1}$$

$y(k)= a_1y(k-1) + a_2y(k-2) + \dots + a_ny(k-n) +$

$b_1u(k-1) + b_2u(k-2) + \dots + b_nu(k-n)$

risposta a $u(k) = \delta(k)$ con condizioni iniziali nulle:

$y(0) = 0$; $y(1) = b_1$; $y(2) = a_1b_1 + b_2$; ……..

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$$
$$y(k) = Cx(k) + Du(k)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_n & a_{n-1} & \dots & \dots & \dots & a_1 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; C = [b_n \quad b_{n-1} \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad b_1]$$

risposta a $u(k) = \delta(k)$ con condizioni iniziali nulle:

$x(0) = 0 \Rightarrow y(0) = 0$;

$x(1) = A0 + B\,\delta(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow y(1) = (b_n \quad \dots \quad b_1)\begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix} = b_1$; …..

ULTERIORI OSSERVAZIONI

Applicando la trasformata Z ad una rappresentazione in spazio di stato, dalle relazioni

$X(z) = z(zI-A)^{-1}x(0) + (zI-A)^{-1}Bu(z)$

$Y(z) = CX(z) = zC(zI-A)^{-1}x(0) + C(zI-A)^{-1}Bu(z)$

otteniamo

1. $\Phi(z) = z(zI-A)^{-1}$
2. $H(z) = (zI-A)^{-1}B$
3. $\Psi(z) = z^{-1}\Phi(z)B$
4. $W(z) = C\,(zI-A)^{-1}B$

FUNZIONI DI TRASFERIMENTO

Impiego delle equazioni alle differenze e della risposta impulsiva (sequenza dei pesi)

$\Downarrow$

calcolo iterativo della risposta di un sistema TD ad una data sequenza di ingressi

$\Downarrow$

- Soluzione in forma chiusa banale solo in casi particolarmente semplici,
- Difficoltà di utilizzo della risposta impulsiva per l'analisi delle proprietà del sistema e della risposta
- Attraverso il problema immagine e la trasformata Z, per sistemi lineari e stazionari (nell'ipotesi di condizioni iniziali nulle) si può ricavare una soluzione in forma chiusa per l'analisi delle proprietà del sistema e della sua risposta.

Dato il generico sistema ARX

$$y(k) + a_1\, y(k-1) + a_2\, y(k-2) + \dots + a_n\, y(k-n) =$$

$$= b_0\, u(k) + b_1\, u(k-1) + b_2\, u(k-2) + \dots + b_m\, u(k-n)$$

le trasformate Z di y(k) e u(k) verificano la relazione Y(z)=H(z)U(z)

con

$$H(z) = \frac{b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \dots + b_n}{z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n}$$

H(z) = funzione di trasferimento del sistema in studio.

Si constata inoltre che se U(z) è la trasformata della sequenza di impulsi di Kronecker,

$$Y(z)=H(z)$$

e dunque che

$$Z^{-1}[H(z)]=h(k)$$

Nelle condizioni in cui operiamo, H(z) è la trasformata z della sequenza dei pesi del sistema.

Esempio

Equazione alle differenze del primo ordine:

$$y(k) = \beta u(k) + \alpha y(k-1)$$

Trasformata z (ipotesi di condizioni iniziali nulle):

$$y(z) = \beta u(z) + \alpha \cdot z^{-1} y(z) \Rightarrow \left(1 - \alpha \cdot z^{-1}\right) y(z) = \beta u(z) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(z) = \frac{\beta}{\left(1 - \alpha \cdot z^{-1}\right)} u(z) = \frac{\beta z}{(z-\alpha)} u(z) = H(z) u(z)$$

$$H(z) = \frac{\beta z}{(z-\alpha)}$$ Funzione di trasferimento

Si consideri la risposta del sistema precedente all'ingresso:

$$u(k) = \delta(k)$$

Poiché: $Z[\delta(k)] = u(z) = 1$

si ha: $y(z) = H(z)u(z) = H(z)$

Cioè, la funzione di trasferimento è la trasformata zeta della risposta del sistema all'ingresso $u(k) = \delta(k)$

Esempio

Modello del PIL:

$$y(k) - \alpha(1+\beta)y(k-1) + \alpha\beta y(k-2) = u(k)$$

Trasformata z (ipotesi di condizioni iniziali nulle):

$$y(z) - \alpha(1+\beta)\cdot z^{-1}\cdot y(z) + \alpha\beta\cdot z^{-2}\cdot y(z) = u(z) \Rightarrow$$

$$\left[1 - \alpha(1+\beta)\cdot z^{-1} + \alpha\beta\cdot z^{-2}\right]\cdot y(z) = u(z) \Rightarrow$$

$$y(z) = \frac{1}{1-\alpha(1+\beta)\cdot z^{-1} + \alpha\beta\cdot z^{-2}}u(z) =$$

$$= \frac{z^2}{z^2 - \alpha(1+\beta)\cdot z + \alpha\beta}u(z) = H(z)u(z)$$

$H(z)$ Funzione di trasferimento

EQUIVALENZA FRA LE RAPPRESENTAZIONI

•Risulta quindi verificato che, sotto le condizioni date (linearità, stazionarietà, condizioni iniziali tutte nulle, ingresso nullo per k<0), i tre modelli:

- ✓Equazione alle differenze
- ✓Somma di convoluzione
- ✓Funzione di trasferimento

sono equivalenti, secondo la definizione di equivalenza già ampiamente discussa in precedenza.

RISPOSTA LIBERA E RISPOSTA FORZATA

Equazione alle differenze:

$$y(k)+a_1 y(k-1)+\cdots+a_n y(k-n)=$$

$$=b_0 u(k)+b_1 u(k-1)\cdots+b_m u(k-m)$$

Trasformata z:

$$y(z)+a_1\left[z^{-1}\cdot y(z)+y(-1)\right]+\cdots+$$

$$\cdots+a_n\left[z^{-n}\cdot y(z)+z^{-n+1}y(-1)+\cdots+y(-n)\right]=$$

$$=b_0 u(z)+b_1 z^{-1}\cdot u(z)+\cdots+b_m z^{-m}\cdot u(z)$$

(ingresso con condizioni iniziali non nulle)

$$y(z)=\frac{b_0+b_1z^{-1}+\cdots+b_mz^{-m}}{1+a_1z^{-1}+\cdots+a_nz^{-n}}u(z)+\frac{p(z^{-1})}{1+a_1z^{-1}+\cdots+a_nz^{-n}}$$

Risposta forzata

Risposta libera

Polinomio i cui coefficienti dipendono dalle condizioni iniziali

Esempio

$$\sum_{k=0}^{+\infty}y(k)z^{-k}-\alpha\cdot y(-1)-\alpha\cdot z^{-1}\sum_{k=0}^{+\infty}y(k)z^{-k}=\beta\sum_{k=0}^{+\infty}u(k)\Rightarrow$$

$$y(z)-\alpha\cdot y(-1)-\alpha\cdot z^{-1}y(z)=\beta u(z)\Rightarrow$$

$$y(z)=\frac{\beta\cdot u(z)}{1-\alpha\cdot z^{-1}}+\frac{\alpha\cdot y(-1)}{1-\alpha\cdot z^{-1}}$$

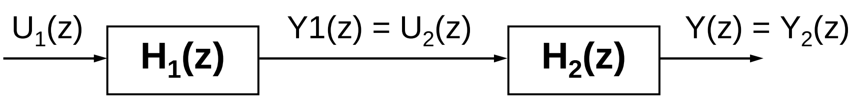
Risposta forzata

Risposta libera

COMPOSIZIONE DI SISTEMI TRAMITE FUNZIONE DI TRASFERIMANTO

- Poiché la funzione di trasferimento è un operatore che applicato alla Z-trasformata dell'ingresso produce per semplice moltiplicazione la Z-trasformata dell'uscita, la **composizione** di **sistemi** può essere trattata in modo **estremamente semplice**

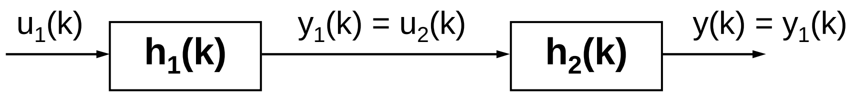
Combinazione in serie o in cascata



$$\frac{Y_2(z)}{U_1(z)} = H_1(z)H_2(z)$$

Esempio

Dati i due sistemi connessi in cascata:



con

$$y_1(k) = u_1(k) + \frac{1}{2} y_1(k-1)$$

$$y_2(k) = u_2(k) + u_2(k-1) - \frac{1}{3} y_2(k-1)$$

Determinare:

- La funzione di trasferimento
- La sequenza dei pesi
- L'equazione alle differenze

$$H_1(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2} z^{-1}} = \frac{z}{z - \frac{1}{2}}$$

$$H_2(z) = \frac{1 + z^{-1}}{1 + \frac{1}{3} z^{-1}} = \frac{z+1}{z + \frac{1}{3}}$$

Funzione di trasferimento

$$H(z) = H_1(z) H_2(z) = \frac{1 + z^{-1}}{1 - \frac{1}{6} z^{-1} - \frac{1}{6} z^{-2}} = \frac{z(z+1)}{\left(z - \frac{1}{2}\right)\left(z + \frac{1}{3}\right)}$$

➢ Espansione in frazioni parziali di H(z) :

$$H(z) = \frac{9}{5}\frac{z}{z-\frac{1}{2}} - \frac{4}{5}\frac{z}{z+\frac{1}{3}}$$

Sequenza dei pesi

$$h(k) = \frac{9}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^k - \frac{4}{5}\left(-\frac{1}{3}\right)^k \quad per \;\; k \; = \; 0, \; 1, \; 2, \; \ldots$$

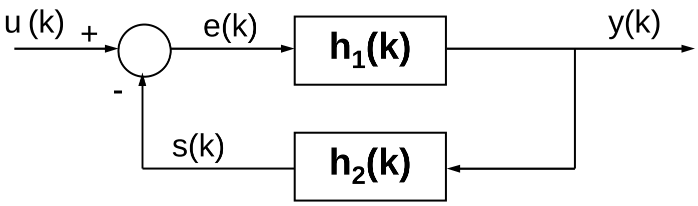
➢ Dalla relazione tra $Y_2(z)$ e $U_1(z)$:

$$Y_2(z) = \left(\frac{1+z^{-1}}{1-\frac{1}{6}z^{-1}-\frac{1}{6}z^{-2}}\right)U_1(z)$$

Equazione alle differenze

$$y_2(k) = u_1(k) + u_1(k-1) + \frac{1}{6}y_2(k-1) + \frac{1}{6}y_2(k-2)$$

Composizione in controreazione



$$S(z) = H_2(z)Y(z) \quad \textit{per la stazionarietà}$$
$$E(z) = U(z) - S(z) = U(z) - H_2(z)Y(z)$$
$$Y(z) = H_1(z)E(z)$$
$$Y(z) = H_1(z)[U(z) - H_2(z)Y(z)]$$
$$Y(z)[1 + H_1(z)H_2(z)] = H_1(z)U(z)$$
$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{H_1(z)}{1 + H_1(z)H_2(z)}$$

- La composizione in controreazione è la più frequentemente usata per sistemi di controllo
- Nel caso del controllo automatico, molto spesso $H_2(z)$ è una pura costante.
  - In tal caso si parla di controllo proporzionale.
- Si dice **funzione di trasferimento a ciclo chiuso**:

$$W(z) = \frac{H_1(z)}{1 + H_1(z)H_2(z)} = \frac{H_1(z)}{1 + \frac{H_1(z)}{k_d}}$$

- Lo studio della equazione:

$$1+\frac{H_1(z)}{k_d}=0$$

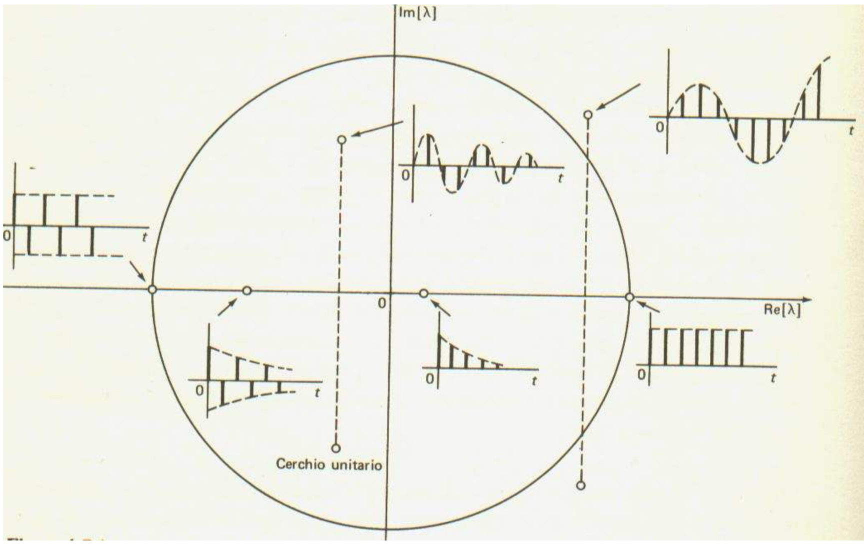
detta "**equazione caratteristica**" permette di riconoscere e mettere in evidenza le più importanti proprietà e prestazioni, dal punto di vista del controllo, del sistema a controreazione

- Al fine di conseguire questo risultato è utile ed opportuno caratterizzare le funzioni di trasferimento tramite le radici del loro numeratore (**zeri della funzione di trasferimento**) e del loro denominatore (**poli della funzione di trasferimento**)

- Come si è già notato nello studio della trasformata z, la funzione di trasferimento può essere scritta in forma fattorizzata, il che rende immediato il calcolo della corrispondente risposta all'impulso.

- Assumendo per semplicità che i poli della funzione di trasferimento considerata siano tutti semplici, conviene riportare in una semplice rappresentazione grafica l'andamento nel tempo delle componenti della risposta all'impulso (modi) a seconda della posizione nel piano z dei poli stessi.

Poli nel piano z e andamenti temporali corrispondenti



STABILITÀ

•Dato il sistema a tempo discreto: $x(t+1) = Ax(t)$

sono stati di equilibrio tutti gli stati $x_e \in X$, tali che:

$$x_e = Ax_e$$

•NB $x_e = 0$ è uno stato di equilibrio (come si possono trovano altri stati di equilibrio?)

•Si fissi un istante iniziale k_0. Uno stato di equilibrio x_e si dice stabile se:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta(\varepsilon, k_0):$$

$$\| x(k_0) - x_e \| < \delta(\varepsilon, k_0) \Rightarrow \| x(k) - x_e \| < \varepsilon, \; \forall k \geq k_0$$

STABILITÀ ASINTOTICA

•Uno stato di equilibrio x_e si dice stabile asintoticamente se esso è stabile, e se, inoltre,

$$\exists \delta_a(k_0) : \| x(k_0) - x_e \| < \delta_a(k_0) \Rightarrow \lim_{k \to \infty} \| x(k) - x_e \| = 0$$

•NB In un sistema lineare, l'unico stato che può essere asintoticamente stabile è lo stato $x_e = 0$. Quando ciò accade, non vi sono altri stati di equilibrio. La stabilità asintotica è dunque una proprietà dell'intero sistema

•Uno stato di equilibrio x_e si dice stabile asintoticamente globalmente se esso è stabile, e se, inoltre,

$$\forall x(k_0) \in X, \ \lim_{k \to \infty} \| x(k) - x_e \| = 0$$

STABILITÀ ESTERNA

DEFINIZIONE: Un sistema a tempo discreto, lineare e sta-zionario descritto dalle equazioni

$$x(t+1) = Ax(t)+Bu(t)$$
$$y(t)=Cx(t)$$

è stabile esternamente nello stato zero (cioè relativamente a condizioni iniziali nulle), o stabile BIBO se:

per ogni ingresso u(t) limitato, la corrispondente uscita a partire da condizioni iniziali nulle y(t) è limitata

TEOREMA 1: Un sistema a tempo discreto, lineare e stazio-nario, con risposta impulsiva *W*(*k*), è stabile esternamente (o stabile BIBO) nello stato zero se e solo se:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} |W(k)| < \infty$$

TEOREMA 2: Un sistema a tempo discreto, lineare e stazionario, con funzione di trasferimento W(z), è stabile esternamente (o stabile BIBO) nello stato zero se e solo se tutti i poli di W(z) sono all'interno del cerchio di raggio unitario centrato nell'origine del piano complesso.

Dimostrazione del TEOREMA 1

(Solo) Condizione sufficiente.

$$\exists L : |u(k)| < L, \forall k$$

$$y(n) = \sum_{k=0}^{+\infty} W(k) u(n-k)$$

$$\Downarrow$$

$$|y(n)| \le \sum_{k=0}^{+\infty} |W(k)| |u(n-k)| \le L \sum_{k=0}^{+\infty} |W(k)| = N$$

Condizione necessaria. Si supponga, per assurdo , che:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} |W(k)| = \infty$$

Si consideri l'ingresso: $u(k) = sign\left[W(r-k)\right]$

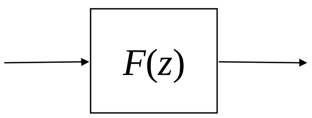
che soddisfa la condizione : $|u(k)| \leq 1, \forall k$

$$y(r) = \sum_{k=0}^{+\infty} W(k) sign\left[W(k)\right] = \sum_{k=0}^{+\infty} |W(k)| = \infty$$

che contraddice l'ipotesi.

CRITERI DI STABILITA'

• Si utilizza la funzione di trasferimento:



$$F(z) = \frac{b(z)}{a(z)}$$

$$a(z) = z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_0$$

$a(z)$=denominatore di $F(z)$=polinomio caratteristico

Criterio di Jury

- Si costruisce la tabella:

$$a(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_0$$

$$\begin{array}{lllll}
a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & 1 \\
1 & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_0 \\
b_0 & b_1 & \cdots & b_{n-1} & \\
b_{n-1} & b_{n-2} & \cdots & b_0 & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
u_0 & u_1 & u_2 & u_3 & \\
u_3 & u_2 & u_1 & u_0 & \\
v_0 & v_1 & v_2 & & \\
v_2 & v_1 & v_0 & &
\end{array}$$

$$b_{n-k-1} = \begin{vmatrix} a_0 & a_{k+1} \\ 1 & a_{n-k-1} \end{vmatrix}, k = 0, \ldots, n-1$$

$$c_{n-2-k} = \begin{vmatrix} b_0 & b_{k+1} \\ b_{n-1} & b_{n-k-2} \end{vmatrix}, k = 0, \ldots, n-2$$

$$\vdots$$

$$v_{2-k} = \begin{vmatrix} u_0 & u_k \\ u_3 & u_{2-k} \end{vmatrix}, k = 0,1,2$$

- Il modulo di tutte le radici è minore di uno se e solo se:
  - a) $a(1) > 0$;
  - b) $a(-1) > 0$ se n pari; $a(-1) < 0$ se n dispari;
  - c) $1 > |a_0|$, $|b_0| > |b_{n-1}|$, ... , $|u_0| > |u_3|$, $|v_0| > |v_2|$

ANALISI DEL COMPORTAMENTO DI REGIME PERMANENTE IN SISTEMI A TEMPO DISCRETO

Obiettivo: caratterizzare le situazioni nelle quali la risposta tende ad essere proporzionale all'ingresso.

Si prendono in considerazioni situazioni nelle quali esiste la risposta a regime permanente.

✓ Condizione sufficiente per l'esistenza di una risposta a regime permanente è la stabilità asintotica, oppure, sotto opportune ipotesi, la stabilità esterna.

✓ Ingressi considerati :

- segnali a struttura polinomiale
- segnali sinusoidali

STIMOLI POLINOMIALI CANONICI

- Polinomi fattoriali canonici, preferiti per motivi computazionali.

$$\boxed{\tilde{u}_k(h) = \frac{h^{(k)}}{k!} = \frac{h(h-1)\dots(h-k+1)}{k!}}$$

$$\boxed{\tilde{u}_k(z) = \frac{z}{(z-1)^{k+1}}}$$

•Risulta :

$$\tilde{y}(h) = C_0 \frac{h^{(k)}}{k!} + \cdots + C_{k-1} h^{(1)} + C_k \; ;$$

$$C_i = \frac{1}{i!}\left[\frac{d^i W(z)}{dz^i}\right]_{z=1} \; ; \; i = 0,1,\ldots,k.$$

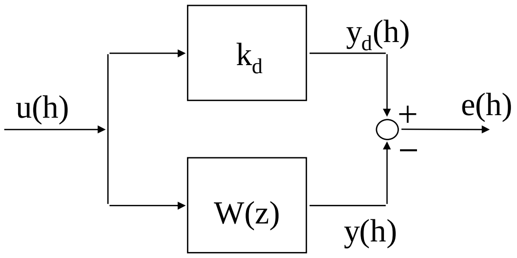
• Nota . L'espressione dei C_i deriva da :

• teorema del valore finale per segnali a tempo discreto

SISTEMA DI ERRORE

• Può essere conveniente definire un sistema di errore :

$$y_d(h) = k_d u(h)$$
$$\tilde{y}_d(h) = k_d \tilde{u}(h)$$



$$\boxed{\begin{aligned} e(h) &= y_d(h) - y(h) = k_d u(h) - y(h) \\ \tilde{e}(h) &= \tilde{y}_d(h) - \tilde{y}(h) = k_d \tilde{u}(h) - \tilde{y}(h) \end{aligned}}$$

• Anche per il sistema di errore può essere definita la risposta a regime permanente, ammesse verificate le condizioni per la sua esistenza. Essa allora vale :

$$\tilde{e}(h) = C_{e,0}\frac{h^{(k)}}{k!} + \cdots + C_{e,k-1}h^{(1)} + C_{e,k}\ ;$$

$$C_{e,i} = \frac{1}{i!}\left[\frac{d^i W_e(z)}{dz^i}\right]_{z=1}\ ;\ i = 0,1,\ldots,k.$$

DEFINIZIONE DI TIPO

• Vale la seguente definizione di tipo di un sistema :

Definizione : Un sistema a tempo discreto si dice di tipo k se e solo se l'errore di regime permanente corrispondente all'ingresso canonico di ordine k è pari ad una costante finita e diversa da zero.

• Seguono le condizioni di appartenenza al tipo k :

a)

$$C_{e,0} = C_{e,1} = \cdots = C_{e,k-1} = 0$$

$$C_{e,k} \neq 0\ , \quad \text{finito}$$

b) il sistema è di tipo k se e solo se $W_e(z)$ ha uno zero di molteplicità k in $z = 1$.

Errore di regime $\boxed{e_k = C_{e,k}}$

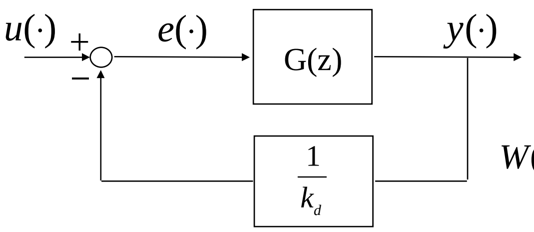
$$\boxed{C_{e,0} = \left[k_d - W(z)\right]\Big|_{z=1} = W_e(z)\Big|_{z=1} \neq 0}$$

Sistema di tipo 0

$$\boxed{C_{e,k} = \left[\frac{1}{(z-1)^k} W_e(z)\right]\Bigg|_{z=1} \neq 0}$$

Sistema di tipo k (k diverso da zero)

c) Tenendo in conto la struttura del sistema :



$$W(z) = \frac{G(z)}{1 + \frac{G(z)}{k_d}} = \frac{k_d G(z)}{k_d + G(z)}$$

$$W_e(z) = k_d - W(z) = \frac{k_d^2}{k_d + G(z)}$$

il sistema è di tipo k se e solo se $G(z)$ ha un polo di molteplicità k in $z = 1$. Corrispondentemente :

$$\boxed{e_0 = C_{e,0}} = \left.\frac{k_d^2}{k_d + G(z)}\right|_{z=1} = \boxed{\frac{k_d^2}{k_d + k_G}}$$

Sistema di tipo 0

$$e_k = C_{e,k} = \left.\frac{1}{(z-1)^k}\frac{k_d^2}{k_d + G(z)}\right|_{z=1} =$$

$$= \left.\frac{k_d^2}{k_d(z-1)^k + (z-1)^k G(z)}\right|_{z=1} = \boxed{\frac{k_d^2}{k_G}}$$

Sistema di tipo k (k diverso da zero)

RISPOSTA A REGIME PERMANENTE A DISTURBI

• Si considera come disturbo una costante (polinomio fattoriale canonico di ordine 0).

✓ sistema astatico : l'errore a regime permanente, in risposta a tale disturbo, è nullo.

✓ sistema statico : l'errore a regime permanente, in risposta a tale disturbo, è finito.

• Sia $y_n(h)$ la risposta al disturbo; si desidera che essa sia identicamente nulla:

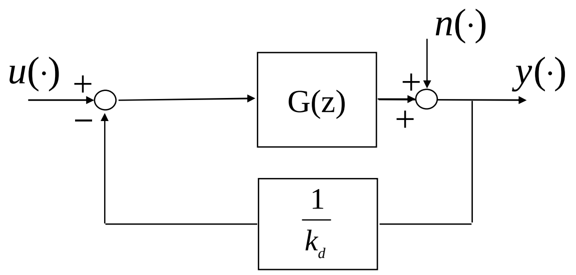
$$e_n(h) = -y_n(h)$$
$$\tilde{e}_n(h) = -\tilde{y}_n(h)$$

• Sia $W_n(z)$ la funzione di trasferimento disturbo-uscita. Allora :

$$\tilde{e}_n = -W_n(z)\big|_{z=1}$$

• Per il legame diretto e la soluzione parziale occorre specificare il punto di applicazione del disturbo.

✓ disturbo additivo in uscita :

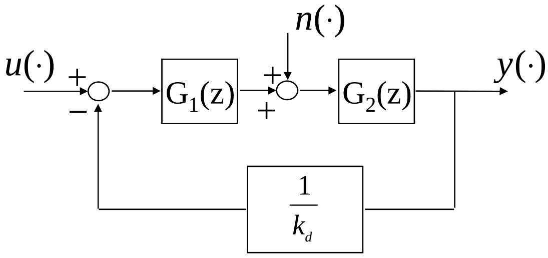


$$W_n = \frac{k_d}{k_d + G}$$

Il sistema è astatico se e solo se G(z) ha un polo in z=1

Se il sistema è statico : $\tilde{y}_n(h) = -\tilde{e}_n(h) = \dfrac{k_d}{k_d + k_G}$

✓ disturbo additivo in un punto intermedio della catena diretta:



$$W_n(z) = \frac{G_2(z)}{1 + \frac{G_1(z)G_2(z)}{k_d}} = \frac{k_d G_2(z)}{k_d + G_1(z)G_2(z)}$$

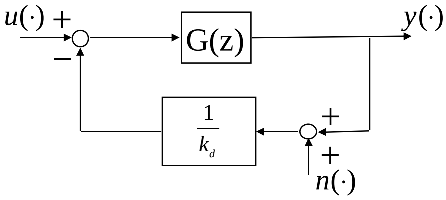
Zeri di $W_n(z)$: zeri di $G_2(z)$ ($G_2(z)$ non ha zeri in $z = 1$)
poli di $G_1(z)$

Si ha astatismo quando i blocchi a monte del punto di applicazione del disturbo ($G_1(z)$) hanno un polo in $z = 1$.

Se il sistema è statico :

$$\tilde{y}_n(h) = \begin{cases} \dfrac{k_d k_{G2}}{k_d + k_{G1}k_{G2}} & ; \text{ se } G_2(z) \text{ non ha poli in } z = 1 \\ \dfrac{k_d}{k_{G1}} & ; \text{ se } G_2(z) \text{ ha poli in } z = 1 \end{cases}$$

✓ disturbo additivo in reazione :



$$W_n(z)=\frac{-\frac{G(z)}{k_d}}{1+\frac{G(z)}{k_d}}=-\frac{G(z)}{k_d+G(z)}$$

Non può esserci astatismo :

$$\tilde{y}_n(h)=\begin{cases}\dfrac{-k_G}{k_d+k_G} & ;\ \text{se } G(z) \text{ non ha poli in } z=1\\[2ex] -1 & ;\ \text{se } G(z) \text{ ha un polo in } z=1\end{cases}$$