

PROCEDIMENTO PER LA DETERMINAZIONE DELL'ANTITRASFORMATA DI LAPLACE DI FUNZIONI RAZIONALI A POLI REALI:

Le funzioni razionali nella variabile S possono essere descritte dalla forma:

$$\#1 \quad F(S) = \frac{N(S)}{D(S)}$$

in cui $N(S)$ rappresenta il numeratore e $D(S)$ il denominatore (caso analogo è quello in cui $N(S)$ sia una funzione costante, mentre $D(S)$ deve obbligatoriamente contenere l'incognita S altrimenti andrebbe a cadere la definizione di funzione razionale).

Occorre verificare il grado massimo delle due funzioni numeratore e denominatore, se il grado di $N(S)$ è maggiore o uguale a quello di $D(S)$ (frazione impropria) si effettua la divisione tra polinomi e si riscrive la #1 nella forma:

$$\#2 \quad F(S) = Q(S) + \frac{R(S)}{D(S)} \quad (1)$$

$Q(S)$ è la funzione quoziente ovvero il risultato della divisione, mentre $R(S)$ è la funzione resto della divisione, ora l'antitrasformazione di $F(S)$ si compone della somma dell'antitrasformazione di una funzione non razionale $Q(S)$ più l'antitrasformazione di una funzione razionale il cui numeratore $R(S)$ è obbligatoriamente di grado minore del denominatore.

L'antitrasformazione di funzioni non razionali segue la regola:

$$\#3 \quad \mathcal{L}^{-1}[AS^n] = A \cdot u_n(t)$$

Per quanto riguarda la parte razionale, per ricondurre una funzione di questo tipo ad una delle funzioni notevoli di cui si conosce l'antitrasformata, la si deve esprimere nella forma:

$$\#4 \quad F(S) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \frac{A_{ij}}{(S - p_i)^j}$$

in cui p_i sono i poli della funzione razionale ossia gli zeri della funzione $D(S)$ e A_{ij} sono dei coefficienti ognuno relativo rispettivamente al polo i e alla molteplicità j di tale polo. Quindi, una volta determinati i poli p_i si ricavano i coefficienti A_{ij} con la formula:

$$\#5 \quad A_{ij} = \lim_{S \rightarrow p_i} \frac{1}{(j-1)!} \left\{ \frac{d^{j-1}}{dS^{j-1}} \left[\frac{R(S)}{D(S)} (S - p_i)^j \right] \right\}$$

e si antitrasforma ogni membro della somma #4 con la formula:

$$\#6 \quad \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{A_{ij}}{(S - p_i)^j} \right] = \frac{A_{ij}}{(j-1)!} \cdot t^{j-1} \cdot e^{p_i t} u_{-1}(t).$$

(1) Se inizialmente si ha una funzione propria ossia il grado di $N(S)$ è minore del grado di $D(S)$, non si esegue la divisione tra polinomi e si considera $N(S) = R(S)$ e $Q(S) = 0$.

ESEMPIO DI ANTITRASFORMAZIONE DI LAPLACE DI UNA FUNZIONE RAZIONALE A POLI REALI:

$$F(S) = \frac{3S+1}{S^4 + 7S^3 + 18S^2 + 20S + 8}$$

Il grado del numeratore (grado 1) è minore del grado del denominatore (grado 4) per cui non è necessario effettuare alcuna divisione tra polinomi.

I poli della funzione sono:

$$S_1 = -2 \text{ (con molteplicità 3)} \quad \text{e} \quad S_2 = -1 \text{ (con molteplicità 1)}$$

riscriviamo la funzione come somma di frazioni:

$$F(S) = \frac{A_{11}}{(S+2)} + \frac{A_{12}}{(S+2)^2} + \frac{A_{13}}{(S+2)^3} + \frac{A_{21}}{(S+1)}$$

ora ricaviamo i coefficienti A_{ij} con la #5:

$$A_{11} = \lim_{s \rightarrow -2} \frac{3S+1}{(s+2)^3(s+1)} \cdot (S+2)^3 = 5$$

$$A_{12} = \lim_{s \rightarrow -2} \frac{d}{dS} \left[\frac{3S+1}{(s+2)^3(s+1)} \cdot (S+2)^3 \right] = \dots = \lim_{s \rightarrow -2} \left(\frac{2}{(S+1)^2} \right) = 2$$

$$A_{13} = \lim_{s \rightarrow -2} \frac{1}{2} \left[\frac{d^2}{d^2 S} \left[\frac{3S+1}{(s+2)^3(s+1)} \cdot (S+2)^3 \right] \right] = \dots = \lim_{s \rightarrow -2} \left(\frac{-2S-2}{(S+1)^4} \right) = 2$$

$$A_{21} = \lim_{s \rightarrow -1} \frac{3S+1}{(s+2)^3(s+1)} \cdot (S+1) = -2$$

quindi riscriviamo la funzione:

$$F(S) = \frac{2}{(S+2)} + \frac{2}{(S+2)^2} + \frac{5}{(S+2)^3} - \frac{2}{(S+1)}$$

antitrasformiamo poi ogni singolo membro della somma con la #6:

$$\mathcal{L}^{-1}[F(S)] = f(t) = 2 \cdot e^{-2t} u_{-1}(t) + 2t \cdot e^{-2t} u_{-1}(t) + \frac{5}{2} t^2 \cdot e^{-2t} u_{-1}(t) - 2e^{-t} u_{-1}(t).$$