Parte 7

Circuiti con Memoria

Introduzione ai Circuiti con Memoria

Nell'ambito dei circuiti LTI (Lineari Tempo-Invarianti cioè stazionari) elettrici CC (a Costanti Concentrate), definiamo <u>*circuiti con memoria*</u> quei circuiti che contengono *almeno un componente con memoria*, nel nostro caso almeno un condensatore, o un induttore o induttori mutuamente accoppiati.

Il metodo di analisi tabellare in un circuito composto da $\mathcal{R}$ rami e $\mathcal{N}$ nodi porta al seguente sistema risolvente per le tensioni e correnti in ogni ramo ($2\mathcal{R}$ incognite):

$$2\mathcal{R}\text{ equazioni}\begin{cases}\mathcal{R}\text{ eq. di Kirchhoff} & \begin{cases}[I_a]+[A][I_c]=[0]\\ [V_c]+[B][V_a]=[0]\end{cases}\\ \\ \mathcal{R}\text{ eq. dei componenti} & \begin{cases}\text{algebriche (comp. senza memoria)}\\ \text{differenziali (comp. con memoria)}\end{cases}\end{cases}$$

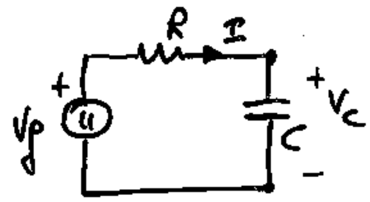
<u>**occorre risolvere un sistema di eq. differenziali lineari a coefficienti costanti**</u>

CIRCUITI DEL 1° ORDINE

Si definiscono circuiti del 1° ordine i circuiti contenenti <u>1 solo ramo con memoria</u> (un condensatore o un induttore).
In questo caso infatti le grandezze elettriche di interesse risultano soluzioni di una equazione differenziale del 1° ordine.

I seguenti 2 circuiti rivestono <u>particolare interesse</u>:

- CIRCUITO RC



dati R, C

$V_g(t)$

$V_c(t)\big|_{t=t_0}$

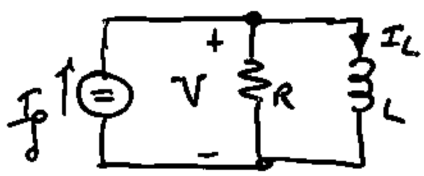
$$\begin{cases} V_g = RI + V_c \\ I = C\dfrac{dV_c}{dt} = C\dot{V}_c \end{cases}$$

definendo $\boxed{\tau_c = RC}$ costante di tempo

si può risolvere in $V_c(t)$

$$\boxed{\dot{V}_c + \frac{1}{\tau_c} V_c = \frac{1}{\tau_c} V_g}$$

CIRCUITO RL



dati R, L

$I_g(t)$

$I_L(t)\big|_{t=t_0}$

$$\begin{cases} I_g = \dfrac{V}{R} + I_L \\ V = L\dfrac{dI_L}{dt} = L\dot{I}_L \end{cases}$$

definendo $\boxed{\tau_L = \frac{L}{R}}$ costante di tempo

si può risolvere in $I_L(t)$

$$\boxed{\dot{I}_L + \frac{1}{\tau_L} I_L = \frac{1}{\tau_L} I_g}$$

Data l'analogia formale delle 2 equazioni, la trattazione viene fatta solo per la prima.

<u>Ipotesi aggiuntive</u>: $V_g(t) = V_g$ costante

$$V_c(t) = K_v e^{-t/\tau_c} + V_g$$

K_v si ricava da $V_c(t_0) = K_v e^{-t_0/\tau_c} + V_g$

$$\boxed{V_c(t) = \left(V_0 - V_g\right) e^{-\frac{(t-t_0)}{\tau_c}} + V_g}$$

per $t \geq t_0$

con $V_0 = V_c(t)\big|_{t=t_0}$

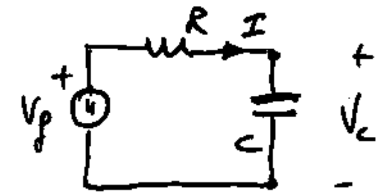
(Cond. iniziale al tempo t_0)

CIRCUITI DEL 1° ORDINE

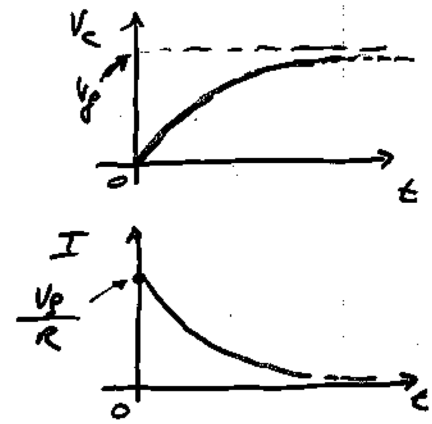
senza perdita di generalità si può porre $t_0 = 0$, eventualmente con una traslazione dell'asse temporale.

- **CARICA DI UN CONDENSATORE**

caso particolare in cui $V_0 = 0 \quad V_g \neq 0$



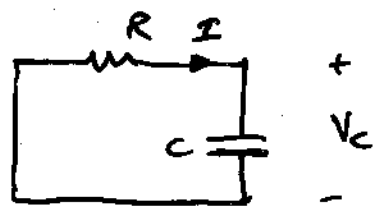
$$V_c(t) = \left(1 - e^{-t/\tau_c}\right) V_g$$



andamenti esponenziali con costante τ_c

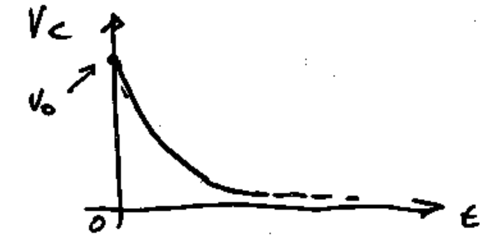
- **SCARICA DI UN CONDENSATORE**

caso particolare in cui $V_0 \neq 0 \quad V_g = 0$



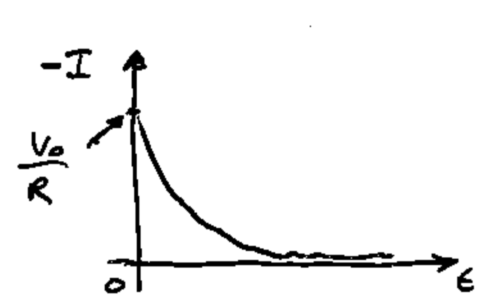
$$V_c(t) = V_0 \, e^{-t/\tau_c}$$

andamenti esponenziali con costante τ_c



NOTA

L'energia $\frac{1}{2} C V_0^2$ immagazzinata nel condensatore a $t = 0$ viene dissipata nella resistenza R da $t = 0 \rightarrow \infty$



$$\int_0^\infty V_c \cdot (-I)\, dt = \int_0^\infty \frac{V_c^2}{R}\, dt = \int_0^\infty \frac{1}{R} V_0^2 e^{-2t/\tau_c}\, dt = \left[-\frac{V_0^2}{R} \cdot \frac{\tau_c}{2} e^{-2t/\tau_c} \right]_0^\infty =$$

$$= \frac{V_0^2}{R} \cdot \frac{\tau_c}{2} = \frac{1}{2} C V_0^2$$

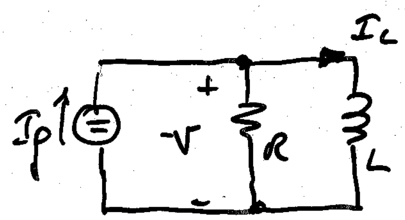
$\boxed{\text{CIRCUITI DEL } 1^\circ \text{ ORDINE}}$

analogamente per il caso del circuito RL risulta:

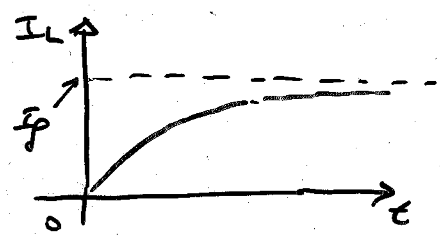
$$\boxed{I_L(t) = (I_0 - I_p)\, e^{-t/\tau_L} + I_p} \qquad \text{con} \quad \begin{cases} I_p \ \text{costante} \\ t_0 = \emptyset \\ I_0 = I_L(t)\big|_{t=t_0} \end{cases}$$

• CIRCUITO RL CON C.I. NULLE

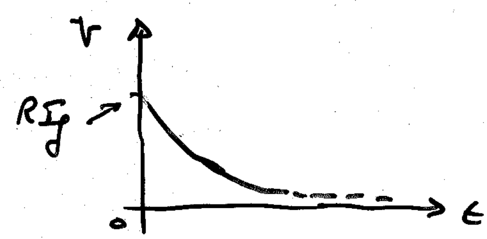
caso particolare in cui $I_0 = 0$ e $I_p \neq 0$



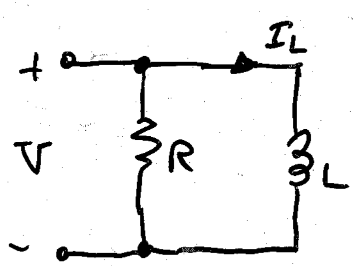
$$I_L(t) = \left(1 - e^{-t/\tau_L}\right) I_p$$



andamento esponenziale con costante di tempo τ_L

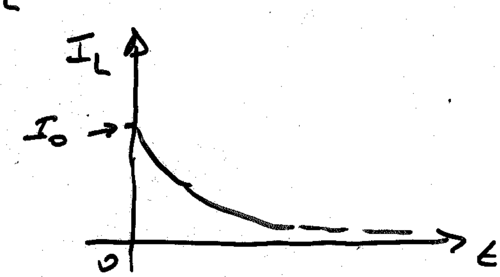


• CIRCUITO RL CON C.I. NON NULLE

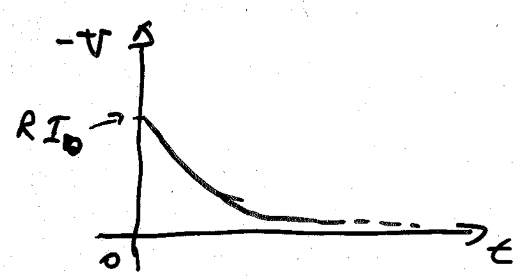


caso particolare in cui $I_0 \neq 0$ e $I_p = \emptyset$

$$I_L(t) = I_0\, e^{-t/\tau_L}$$



andamento esponenziale con costante di tempo τ_L.

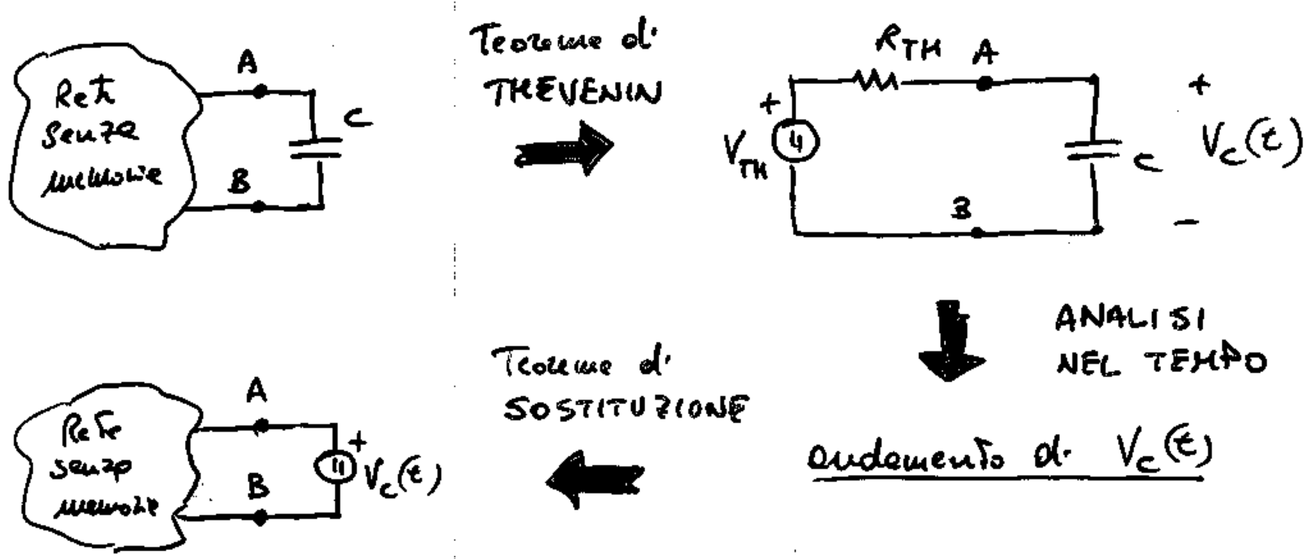


$\boxed{\text{NOTA}}$

Si può dimostrare facilmente che l'energia $\frac{1}{2} L I_0^2$ immagazzinata per $t=0$ nell'induttore viene dissipata per $t = 0 \to \infty$ nel resistore R.

CIRCUITI DEL 1° ORDINE

CASO GENERALE RC CON V_g = costante



le tensioni e le correnti nei rami avranno andamenti costanti o esponenziali con costante di tempo $R_{TH}C$ o combinazioni dei due.

NOTE

1) Lo schema funziona anche se non è possibile applicare il Teorema di Thevenin ma quello di Norton.

2) Lo schema <u>non</u> funziona se non è possibile applicare il Teorema di sostituzione nella forma indicata. Circuiti contenenti MAGLIE di soli V_g e C sono quindi casi particolari (non considerati qui)

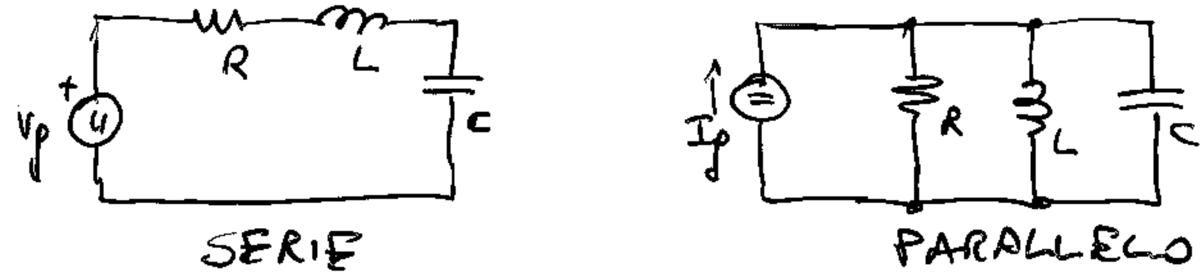
3) Se i generatori V_g hanno andamenti non costanti lo schema funziona ancora, ma l'analisi nel tempo diventa complessa.

ESISTE UNA ANALOGA TRATTAZIONE PER IL CASO RL, Teorema di NORTON e costante di tempo $\tau_L = G_{No} L$, tagli di soli I_g e L

CIRCUITI DEL 2° ORDINE

si definiscono circuiti del 2° ordine, circuiti contenenti 2 rami con memoria (2 rami di tipo condensatore o induttore oppure degli induttori mutuamente accoppiati).

Circuiti tipici



Lo studio di questi circuiti richiede la soluzione di una equazione differenziale lineare a coefficienti costanti di ordine al massimo 2. (Verrà provato nel seguito)

CIRCUITI DI ORDINE N

Circuiti contenenti <u>N rami con memoria</u>.

L'andamento di una generica grandezza elettrica nel ramo "K" (V_K o I_K) sarà soluzione di una <u>equazione differenziale lineare a coeff. costanti di grado non superiore a N.</u>

Infatti dal metodo tabellare risulta:

$$\begin{cases} R \text{ eq. Kirchhoff.} \\ R-N \text{ equ. algebriche rami senza memoria} \\ N \text{ eq. differenziali lineari a coef cost. di ordine } 1 \end{cases}$$

RELAZIONE GENERALE INGRESSO-USCITA

è possibile ottenere in maniera intuitiva le relazioni generali che lega un generico ingresso (V_g, I_g) ad una generica uscita $(V_K$ o I_K nel ramo k-esimo$]$ in un circuito LTI con memorie e con condizioni iniziali tutte nulle.

Siano:

$\delta(t)$ l'impulso di DIRAC ; $u(t)$, $e(t)$ l'uscita e l'ingresso rispettivamente

$T\{\ \}$ la trasformazione LIT operata dal circuito

$h(t) = T\{\delta(t)\}$ la risposta del circuito quando $e(t)=\delta(t)$ (risposta impulsiva), nulla per $t<0$ (causalità)

Allora risulta:

$$u(t) = T\{e(t)\} \overset{\text{dalla proprietà di campionamento dell'impulso } \delta(t)}{=} T\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} e(\tau)\,\delta(t-\tau)\,d\tau\right\} =$$

$$\underset{\text{dalla linearità}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} e(\tau)\, T\{\delta(t-\tau)\}\, d\tau \underset{\text{dalla stazionarietà}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} e(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau$$

RELAZIONE INGRESSO-USCITA NEL TEMPO

$$\boxed{u(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\cdot e(t-\tau)\, d\tau}$$

L'integrale viene detto "DI CONVOLUZIONE" e gode delle proprietà di un prodotto (distributiva, associativa, commutativa), la sua risposta dipende dall'andamento di $h(t)$.

$$\boxed{u(t) = h(t) * e(t)}$$ prodotto di convoluzione.

RELAZIONE GENERALE (INGRESSO-USCITA)

NOTE

1) La conoscenza della risposta impulsiva caratterizza completamente l'effetto del circuito tra l'ingresso $e(t)$ e l'uscita $u(t)$. Nota $h(t)$ è possibile calcolare $u(t)$ mediante l'integrale di convoluzione a partire dall'andamento noto di $e(t)$.

2) Le condizioni iniziali sugli elementi con memoria possono essere modellate mediante generatori indipendenti di tensione o di corrente (come si vedrà nel seguito).

3) Cambiando la posizione dell'effetto e/o della causa in generale la risposta impulsiva sarà differente.

4) L'integrale di convoluzione esprime la linearità e la stazionarietà: l'uscita è la somma (integrale) delle risposte ai singoli valori dell'ingresso (impulsi di area $e(t)$).

5) La relazione generale è valida anche per i circuiti senza memoria.

Relazione ingresso-uscita per un circuito senza memoria

$u(t) = K_h \cdot e(t)$ $\quad K_h$ costante opportuna dipendente dalla posizione della causa/effetto

Infatti dal metodo tabellare $u(t)$ è soluzione di un sistema di equazioni algebriche lineari. Quindi risulta

$$h(t) = K_h \cdot \delta(t)$$

$$u(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau = K_h \int_{-\infty}^{+\infty} e(\tau)\, \delta(t-\tau)\, d\tau = K_h\, e(t)$$