

Sistemi trifase

Sistemi trifase di generatori

I **sistemi trifase** rivestono un ruolo assai importante negli apparati e nei sistemi elettrici di potenza e rappresentano l'esemplare più illustre dei più generici *sistemi polifase*.

Un sistema trifase di forze elettromotrici non è altro che un *insieme di tre f.e.m. della stessa ampiezza ed equisfasate tra loro*. Questo implica che le relazioni per le tre f.e.m. sono:

$$e_1(t) = E_M \sin(\omega t)$$

$$e_2(t) = E_M \sin\left(\omega t - \frac{2}{3}\pi\right)$$

$$e_3(t) = E_M \sin\left(\omega t - \frac{4}{3}\pi\right)$$

Le tre f.e.m. costituiscono una *terna simmetrica diretta* rappresentata dai seguenti fasori, dove i valori efficaci si equivalgono ($E_1 = E_2 = E_3 = E$):

$$\bar{E}_1, \bar{E}_2 = e^{-j\frac{2}{3}\pi} \bar{E}_1, \bar{E}_3 = e^{-j\frac{4}{3}\pi} \bar{E}_1$$

L'ordine progressivo delle fasi è nel verso orario.

Scambiando tra loro le ultime due f.e.m. si ottiene una ***terna simmetrica inversa*** rappresentata dai seguenti fasori, dove i valori efficaci si equivalgono ($\bar{E}_1 = \bar{E}_2 = \bar{E}_3 = \bar{E}$):

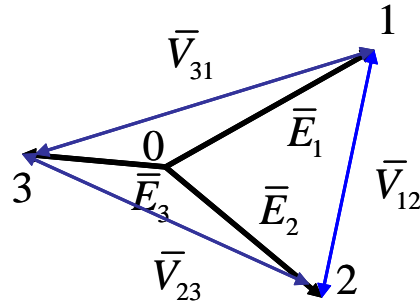
$$\bar{E}_1, \bar{E}_2 = e^{+j\frac{2}{3}\pi} \bar{E}_1, \bar{E}_3 = e^{+j\frac{4}{3}\pi} \bar{E}_1$$

L'ordine progressivo delle fasi è nel verso antiorario.

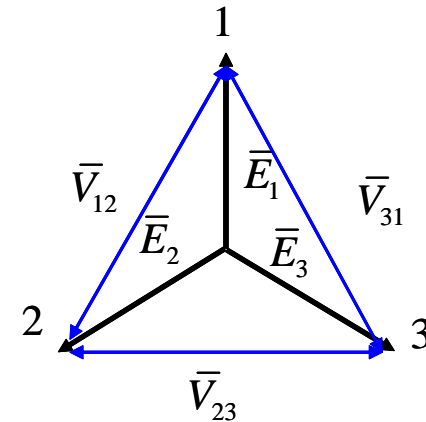
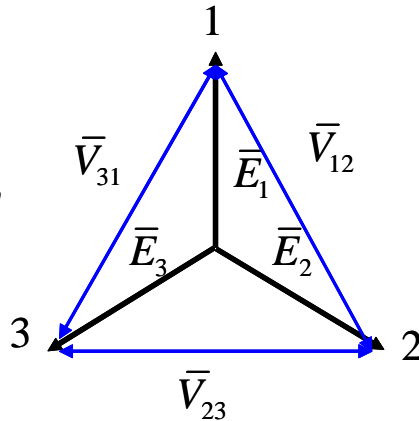
Per entrambi i sistemi trifase considerati la risultante della somma dei vettori fasoriali è nulla, ovvero la somma delle f.e.m è nulla ad ogni istante.

Collegamenti a stella e a triangolo

**Terna
generica di
tensioni di
fase e
concatenate**



**Terna
simmetrica
diretta**



Terna simmetrica inversa

Tre sorgenti f.e.m. si dicono **collegate a stella** quando il morsetto di ingresso o di uscita di ciascun bipolo è unito in un punto comune rappresentante il centro stella O dal quale può essere derivato un altro morsetto.

Tale configurazione costituisce una *rete attiva accessibile da tre o quattro morsetti*: è dunque un **tripolo** o un **tetrapolo**.

Chiamiamo $O = F_1 = F_2 = F_3$ il **centro stella** (morsetto comune ai tre bipoli esistenti), $\bar{E}_1, \bar{E}_2, \bar{E}_3$ le tre **tensioni di fase**, o stellate, mentre **tensioni concatenate** le tensioni tra i morsetti liberi della stella di f.e.m, ovvero seguendo il verso antiorario:

$$v_{12}(t) = e_1(t) - e_2(t), \quad v_{23}(t) = e_2(t) - e_3(t), \quad v_{31}(t) = e_3(t) - e_1(t),$$

Queste tensioni costituiscono una terna simmetrica con risultante nulla. In termini fasoriali possiamo scrivere le seguenti (con valori efficaci che soddisfano $V_{12} = V_{23} = V_{31} = V$):

$$\bar{V}_{12} = \bar{E}_1 - \bar{E}_2, \quad \bar{V}_{23} = \bar{E}_2 - \bar{E}_3, \quad \bar{V}_{31} = \bar{E}_3 - \bar{E}_1,$$

Il legame tra i valori efficaci delle tensioni di fase e quelle concatenate è:

$$V = 2E \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}E$$

Tre sorgenti f.e.m. si dicono **collegate a triangolo** quando il morsetto di ingresso di una fase è collegato al morsetto di uscita di un'altra fase.

Tale configurazione costituisce una *rete attiva accessibile da tre morsetti*: è dunque un **tripolo**. In questo caso *le tensioni concatenate e le tensioni di fase coincidono* e costituiscono una terna simmetrica con risultante nulla.

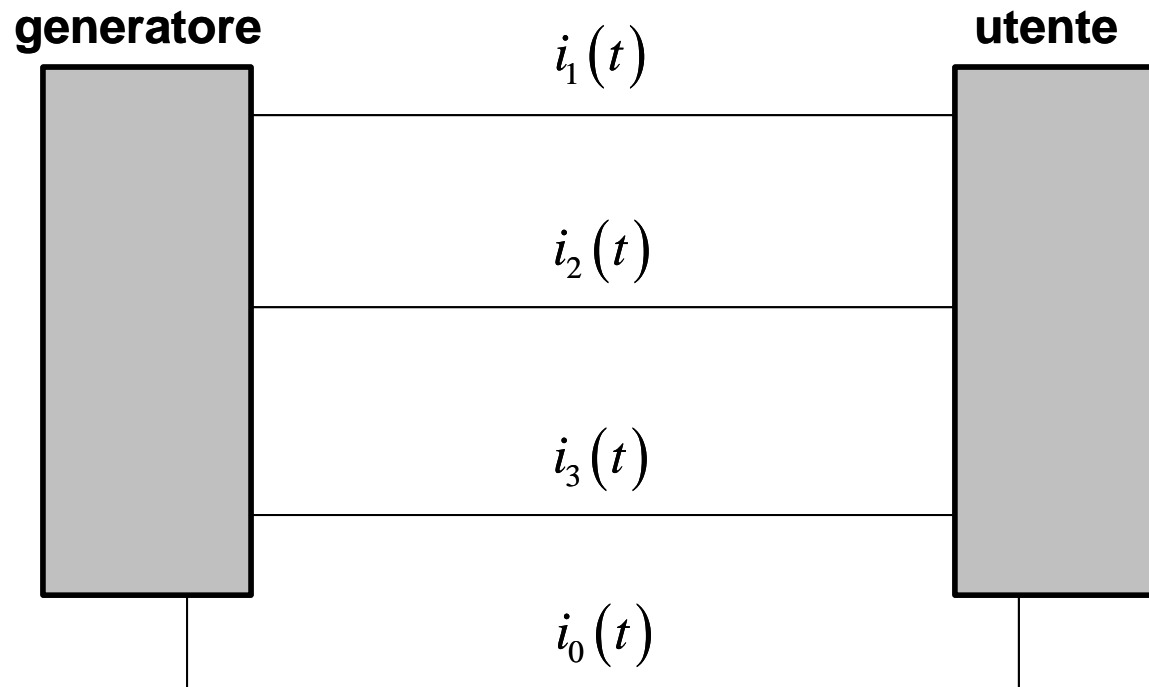
Due reti attive a stella e a triangolo sono ai morsetti esterni elettricamente equivalenti, quando le tensioni concatenate sono ordinatamente coincidenti, ovvero:

$$\begin{aligned}\bar{V}_{12} &= \bar{V}'_{12}, & \bar{V}_{23} &= \bar{V}'_{23}, & \bar{V}_{31} &= \bar{V}'_{31}, \\ \bar{E}_1 - \bar{E}_2 &= \bar{E}'_1, & \bar{E}_2 - \bar{E}_3 &= \bar{E}'_2, & \bar{E}_3 - \bar{E}_1 &= \bar{E}'_3,\end{aligned}$$

mentre per i valori efficaci vale: $E' = V' = \sqrt{3}E$

Analisi di reti trifase

Una semplice rete trifase è costituita dal collegamento in cascata di una *rete attiva di generazione* e di una *rete passiva di utilizzazione*.

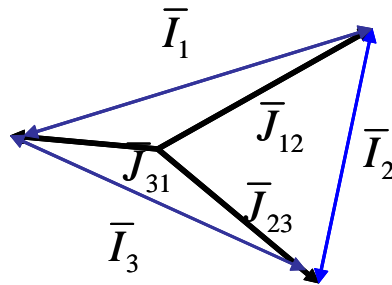


La rete di utenza può essere di tre tipi: *a stella*, *a stella accessibile* o *a triangolo*, analogamente a quanto succede nel caso dei generatori.

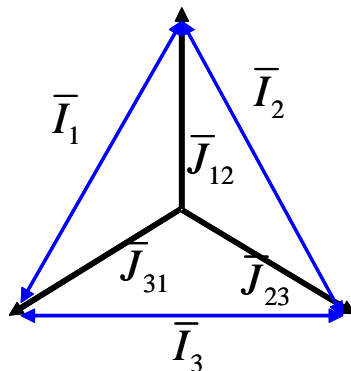
Il carico si dice **equilibrato** se le impedenze della rete passiva di utenza sono uguali.

Nei collegamenti tra generatori e carichi trifasi si individua la terna delle **correnti di linea**, ovvero $i_1(t)$, $i_2(t)$, $i_3(t)$. Per le reti a quattro fili si aggiunge la corrente $i_0(t)$.

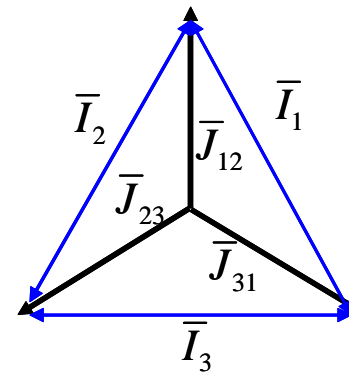
**Terna
generica di
correnti di
linea e delle
fasi interne**



**Terna
simmetrica
diretta**



Terna simmetrica inversa



Anche queste correnti possono stabilire *una terna simmetrica* come le tensioni viste in precedenza. Una conseguenza di questa simmetria è che *la somma delle correnti di linea è nulla*, in presenza o meno del neutro.

Per carichi a stella *le correnti di linea sono proprio le correnti che attraversano le impedenze.* Nei collegamenti a triangolo ciò non avviene e *le correnti delle impedenze costituiscono la terna delle correnti delle fasi interne.*

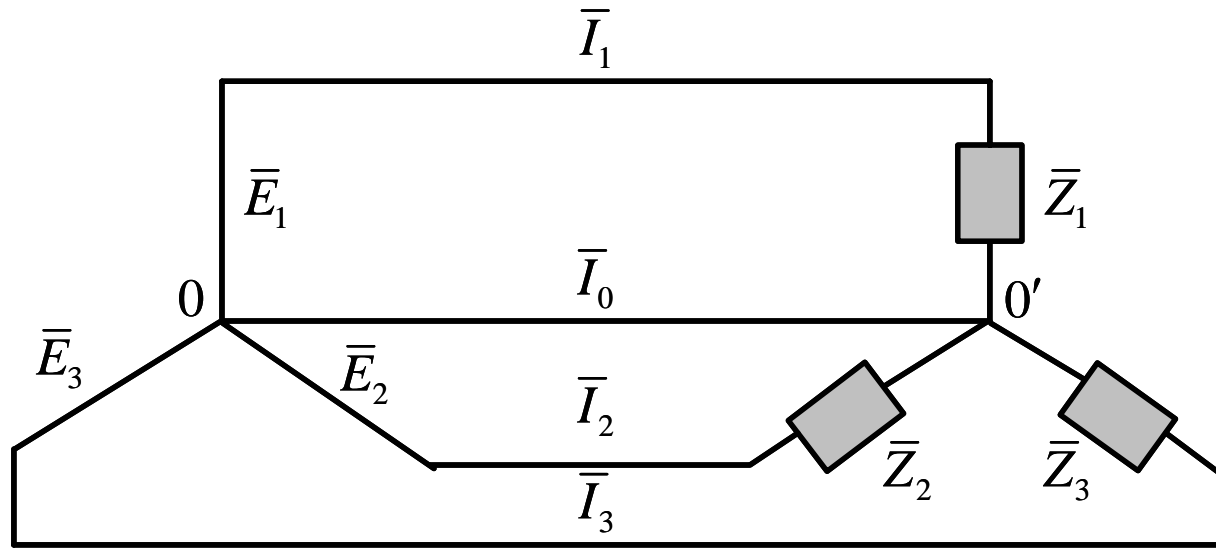
Anche questa terna può essere simmetrica analogamente a quanto visto in precedenza, ed ancora ne deriva la proprietà che la somma di tali correnti è nulla.

La relazione tra correnti di linea e correnti delle fasi interne è la stessa che c'è tra le tensioni concatenate e quelle di fase. Ovvero (nel tempo e nel piano dei fasori):

$$i_1(t) = j_{12}(t) - j_{31}(t), \quad i_2(t) = j_{23}(t) - j_{12}(t), \quad i_3(t) = j_{31}(t) - j_{23}(t)$$

$$\bar{I}_1(t) = \bar{J}_{12}(t) - \bar{J}_{31}(t), \quad \bar{I}_2(t) = \bar{J}_{23}(t) - \bar{J}_{12}(t), \quad \bar{I}_3(t) = \bar{J}_{31}(t) - \bar{J}_{23}(t)$$

Una prima possibile configurazione è quella *stella-stella*.



E' possibile unire i centri stella con un quarto conduttore, supposto a impedenza nulla. I due centri sono quindi un punto unico, chiamato *nodo O*: esso si assume come riferimento a potenziale convenzionalmente nullo.

Il problema di analisi di questa semplice rete trifase consiste nella determinazione delle correnti $\bar{I}_1, \bar{I}_2, \bar{I}_3$ che interessano i tre conduttori di fase e della corrente \bar{I}_0 che interessa i centri stella.

Dall'ispezione diretta della rete possiamo scrivere:

$$\begin{aligned}\bar{E}_1 &= \bar{Z}\bar{I}_1, & \bar{E}_2 &= \bar{Z}\bar{I}_2, & \bar{E}_3 &= \bar{Z}\bar{I}_3 \\ \bar{I}_0 &= \bar{I}_1 + \bar{I}_2 + \bar{I}_3\end{aligned}$$

Se *il sistema di tensioni è simmetrico ed il carico equilibrato*, le correnti hanno lo stesso valore efficace, pari a $I = \frac{E}{2}$, e lo stesso sfasamento φ rispetto alle tensioni omologhe, essendo φ l'argomento delle impedenze \bar{Z} . I fasori delle correnti sono quindi:

$$\bar{I}_1 = \frac{\bar{E}_1}{Z} e^{-j\varphi}, \quad \bar{I}_2 = \frac{\bar{E}_2}{Z} e^{-j\varphi}, \quad \bar{I}_3 = \frac{\bar{E}_3}{Z} e^{-j\varphi}$$

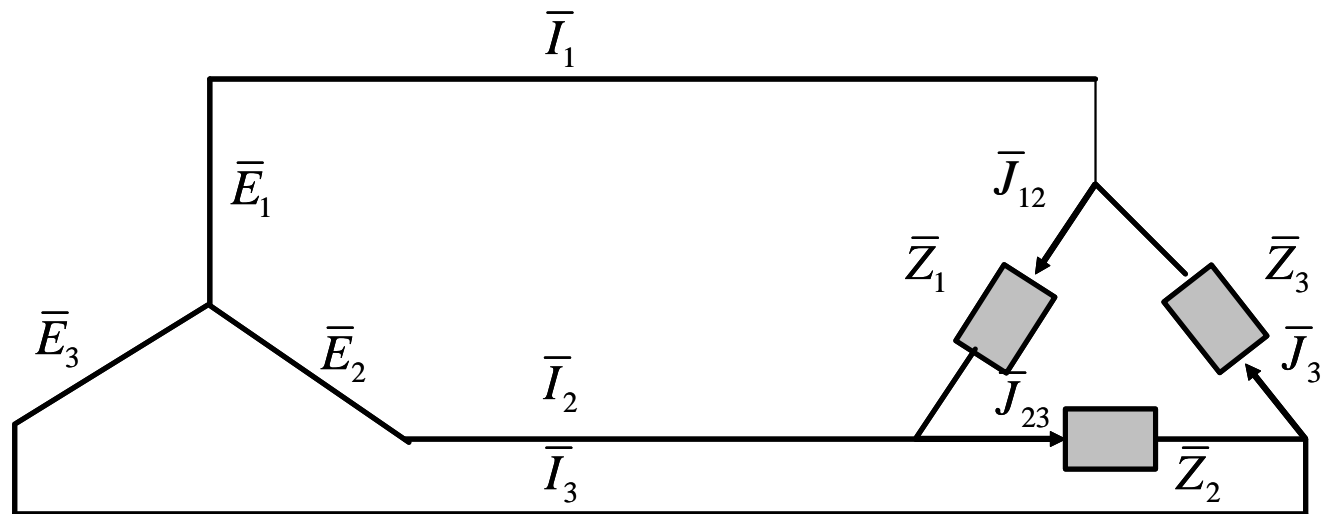
mentre nel tempo avremo:

$$\begin{aligned}i_1(t) &= I_M \sin(\omega t - \varphi) \\ i_2(t) &= I_M \sin\left(\omega t - \varphi - \frac{2}{3}\pi\right) \\ i_3(t) &= I_M \sin\left(\omega t - \varphi - \frac{4}{3}\pi\right)\end{aligned}$$

La terna delle correnti di linea è perciò simmetrica, quindi vale pure:

$$\bar{I}_0 = \frac{1}{\bar{Z}} (\bar{E}_1 + \bar{E}_2 + \bar{E}_3) = 0.$$

Se il carico è collegato a triangolo allora abbiamo la *configurazione stella-triangolo*. In questo caso si ha la connessione in cascata di due tripoli.



Le correnti $\bar{I}_1, \bar{I}_2, \bar{I}_3$ e le correnti che attraversano le impedenze di carico \bar{Z} ($\bar{J}_1, \bar{J}_2, \bar{J}_3$) sono legate dalle seguenti relazioni (facilmente ottenibili per ispezione del circuito):

$$\bar{I}_1 = \bar{J}_1 - \bar{J}_3, \quad \bar{I}_2 = \bar{J}_2 - \bar{J}_1, \quad \bar{I}_3 = \bar{J}_3 - \bar{J}_2$$

Le correnti di carico valgono:

$$\bar{J}_1 = \frac{\bar{V}_{12}}{\bar{Z}} = \frac{\bar{E}_1 - \bar{E}_2}{\bar{Z}}, \quad \bar{J}_2 = \frac{\bar{V}_{23}}{\bar{Z}} = \frac{\bar{E}_2 - \bar{E}_3}{\bar{Z}}, \quad \bar{J}_3 = \frac{\bar{V}_{31}}{\bar{Z}} = \frac{\bar{E}_3 - \bar{E}_1}{\bar{Z}}.$$

Esse costituiscono una stella simmetrica di fasori con ampiezza pari a $J = \frac{V}{Z} = \sqrt{3} \frac{E}{Z}$ e

sfasamento φ rispetto alle tensioni concatenate di alimentazione.

I fasori delle correnti ai morsetti esterni soddisfano le seguenti:

$$\bar{I}_1 = 3 \frac{\bar{E}_1}{\bar{Z}}, \quad \bar{I}_2 = 3 \frac{\bar{E}_2}{\bar{Z}}, \quad \bar{I}_3 = 3 \frac{\bar{E}_3}{\bar{Z}}$$

Esse hanno valore efficace $I = \sqrt{3}J = \sqrt{3} \frac{E}{Z}$ e sfasamento φ rispetto alle omologhe tensioni di

fase.

L'analisi della rete può essere eseguita anche operando preliminarmente *la trasformazione della rete a triangolo nella rete a stella elettricamente equivalente* avente impedenze $\bar{Z}' = \frac{\bar{Z}}{3}$.

Si otterrebbero per le correnti ai morsetti le espressioni già definite e da queste poi si deriverebbero le correnti di carico.

Queste procedure possono essere utilizzate anche per altri tipi di configurazioni, ricorrendo eventualmente alle opportune trasformazioni di rete.

I risultati ottenuti mettono in evidenza che, per un sistema simmetrico nelle tensioni ed equilibrato nelle correnti, *dalle grandezze elettriche di una fase possono essere immediatamente ottenute le grandezze delle altre due fasi.*

È dunque conveniente eseguire l'analisi considerando il ***circuito equivalente monofase*** in cui la tensione e la corrente, prive di pedici, possono essere attribuite per esempio alla fase 1. Questo circuito è molto utile per la risoluzione delle reti trifase equilibrate e simmetriche: infatti possiamo sempre pensare di ricondurci al caso di configurazione stella-stella e quindi determinare tale circuito monofase rappresentato dalla maglia racchiusa da una fase e il neutro.

Il carico elettrico di una rete trifase può essere costituito da tre impedenze diverse tra loro. In tal caso pur essendo il sistema delle f.e.m. simmetrico, il sistema trifase risulterà squilibrato, cioè costituito da fasori aventi ampiezze e fasi diverse tra loro. Nel caso della configurazione stella-stella la corrente del neutro sarà necessariamente diversa da zero pari a:

$$\bar{I}_0 = \frac{\bar{E}_1}{\bar{Z}_1} + \frac{\bar{E}_2}{\bar{Z}_2} + \frac{\bar{E}_3}{\bar{Z}_3}$$

Per un sistema squilibrato non si può ovviamente definire un circuito equivalente monofase.

Potenza nei sistemi trifase

- Si consideri un sistema simmetrico trifase diretto di f.e.m. che generi un sistema trifase equilibrato di correnti.
- La potenza istantanea totale associata al sistema trifase è uguale alla somma delle potenze istantanee associate a ciascuna fase:

$$p = e_1 i_1 + e_2 i_2 + e_3 i_3$$

che possiamo anche scrivere nel seguente modo:

$$p = E_M I_M \left[\sin(\omega t) \sin(\omega t - \varphi) + \sin\left(\omega t - \frac{2}{3}\pi\right) \sin\left(\omega t - \frac{2}{3}\pi - \varphi\right) + \sin\left(\omega t - \frac{4}{3}\pi\right) \sin\left(\omega t - \frac{4}{3}\pi - \varphi\right) \right]$$

da cui deriva la seguente formula:

$$p = \frac{E_M I_M}{2} [\cos(\varphi) - \cos(2\omega t - \varphi) + \cos(\varphi) - \cos\left(2\omega t - \frac{4}{3}\pi - \varphi\right) + \cos(\varphi) - \cos\left(2\omega t - \frac{8}{3}\pi - \varphi\right)]$$

Sapendo che E, I esprimono i *valori efficaci delle f.e.m.* e delle correnti, e che $\cos(\varphi)$ è il *fattore di potenza*, la potenza istantanea totale assume la seguente forma:

$$p = 3EI \cos(\varphi)$$

Questa formula esprime una proprietà fondamentale dei sistemi trifase simmetrici nelle tensioni ed equilibrati nelle correnti: ***la costanza della potenza istantanea.***

Peraltro sappiamo che un sistema trifase di correnti genera un campo magnetico rotante nello spazio. Queste proprietà giustificano la possibilità di creare coppie elettromagnetiche di ampiezza costante nel tempo e quindi ben adatte ad alimentare motori elettrici trifasi.

Calcoliamoci ora la *potenza attiva, reattiva e apparente*:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt = 3EI \cos(\varphi)$$

$$Q = 3EI \sin(\varphi)$$

$$P_{app} = 3EI$$

In termini di tensioni concatenate avremo:

$$p = P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt = \sqrt{3}VI \cos(\varphi)$$

$$Q = \sqrt{3}VI \sin(\varphi)$$

$$P_{app} = \sqrt{3}VI$$

La potenza complessa totale è data da (circuito simmetrico e bilanciato):

$$\bar{S} = \bar{E}_1 \bar{I}_1^* + \bar{E}_2 \bar{I}_2^* + \bar{E}_3 \bar{I}_3^* = P + jQ = 3EI (\cos \varphi + j \sin \varphi)$$

La misura della potenza attiva e reattiva in un sistema trifase simmetrico e equilibrato si può fare con ***un solo wattmetro***, inserito tra una fase e il neutro. Se questo non è disponibile può

essere costruito artificialmente mediante una stella di resistori dei quali due hanno resistenza R mentre l'altro in serie coi morsetti del wattmetro ha resistenza $R - R_v$ dove R_v è la resistenza della bobina volumetrica del wattmetro. In questo modo la stella di resistori è perfettamente bilanciata ed il suo centro ha il potenziale del neutro e la tensione assorbita dalla bobina voltmetrica del wattmetro è proporzionale alla tensione stellata. Così misuriamo la potenza di una fase: moltiplicando per 3 otteniamo la potenza dell'intero sistema.

Anche la potenza reattiva può essere calcolata con metodi tipici dei circuiti monofasi.

Analisi sequenziale delle reti trifasi

NOTA: Le grandezze in gioco sono fasori, ma per comodità di notazione esse non sono state indicate al solito modo, es. \bar{A} .

TEOREMA DELLE COMPONENTI SIMMETRICHE (Fortesque, 1918)

Una terna di vettori arbitraria si può rappresentare in modo unico come sovrapposizione di una terna diretta, una inversa ed una omopolare, i cui primi vettori abbiano modulo e argomento opportuni.

Osserviamo che queste terne possono essere così rappresentate:

| | | | |
|-----------------------------------|-----------------|-----------------------------------|------------------|
| (A_1, A_2, A_3) | <i>generica</i> | $(A^-, \alpha A^-, \alpha^2 A^-)$ | <i>inversa</i> |
| $(A^+, \alpha^2 A^+, \alpha A^+)$ | <i>diretta</i> | (A^0, A^0, A^0) | <i>omopolare</i> |

Il termine α rappresenta un operatore che nel caso di terne sinusoidali vale: $\alpha = e^{j\frac{2}{3}\pi}$

Il teorema di Fortesque ci dice che possiamo scrivere:

$$\begin{aligned}A_1 &= A^+ + A^- + A^0 \\A_2 &= \alpha^2 A^+ + \alpha A^- + A^0 \\A_3 &= \alpha A^+ + \alpha^2 A^- + A^0\end{aligned}$$

e che tale sistema ammette una unica soluzione. In termini matriciali:

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= (A_1, A_2, A_3)' & \mathbf{A}_s &= (A^+, A^-, A^0)' \\ \mathbf{S} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha^2 & \alpha & 1 \\ \alpha & \alpha^2 & 1 \end{pmatrix} & \mathbf{S}^{-1} &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 1 & \alpha^2 & \alpha \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \mathbf{S}^\dagger \\ \mathbf{A} &= \mathbf{S} \mathbf{A}_s & \mathbf{A}_s &= \mathbf{S}^{-1} \mathbf{A} = \frac{1}{3} \mathbf{S}^\dagger \mathbf{A}\end{aligned}$$

I vettori colonna della matrice \mathbf{S} sono detti *sequenze*. \mathbf{S}^\dagger è l'hermitiana (trasposta e complessa coniugata) di \mathbf{S} .

Accanto alla terna \mathbf{A} possiamo considerare la terna *concatenata* $\mathbf{A}_C = (A_{23}, A_{31}, A_{12})'$, dove:

$$A_{23} = A_2 - A_3, \quad A_{31} = A_1 - A_3, \quad A_{12} = A_1 - A_2$$

Si pone il problema di calcolare le componenti simmetriche della terna concatenata.

Innanzitutto, valendo $A_{23} + A_{31} + A_{12} = 0$ si ottiene $A_C^0 = 0$. Le altre componenti possono essere scritte in funzione delle componenti della terna originaria \mathbf{A} (che chiameremo *stellata*):

$$A_C^+ = -j\sqrt{3}A^+ \quad A_C^- = j\sqrt{3}A^-$$

La trasformazione in componenti simmetriche della terna concatenata definisce quindi quella relativa alla terna stellata a meno della componente omopolare.

Consideriamo ora un operatore lineare sulle terne, che agisce secondo la seguente: $\mathbf{B} = \mathbf{M}\mathbf{A}$, dove \mathbf{A} è la terna di partenza mentre \mathbf{B} la terna immagine. Vogliamo determinare la rappresentazione in componenti simmetriche dell'operatore \mathbf{M} . Dalla scomposizione delle terne \mathbf{A} , \mathbf{B} avremo:

$$\mathbf{B}_s = \frac{1}{3} \mathbf{S}^\dagger \mathbf{M} \mathbf{S} \mathbf{A}_s = \mathbf{M}_s \mathbf{A}_s$$

$$\mathbf{M}_s = \frac{1}{3} \mathbf{S}^\dagger \mathbf{M} \mathbf{S} \quad \text{diretta}$$

$$\mathbf{M} = \frac{1}{3} \mathbf{S} \mathbf{M}_s \mathbf{S}^\dagger \quad \text{inversa}$$

Queste relazioni tra \mathbf{M} e \mathbf{M}_s permettono di mettere in luce una proprietà fondamentale della trasformazione di Fortesque, ovvero la congruenza tra matrici cicliche e diagonali. Infatti si può dimostrare che secondo le relazioni diretta e inversa valgono rispettivamente:

$$\begin{pmatrix} M_1 & M_2 & M_3 \\ M_3 & M_1 & M_2 \\ M_2 & M_3 & M_1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} M_1 + \alpha^2 M_2 + \alpha M_3 & 0 & 0 \\ 0 & M_1 + \alpha^2 M_3 + \alpha M_2 & 0 \\ 0 & 0 & M_1 + M_2 + M_3 \end{pmatrix} \doteq \begin{pmatrix} M^+ & 0 & 0 \\ 0 & M^- & 0 \\ 0 & 0 & M^0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} M_1 & 0 & 0 \\ 0 & M_2 & 0 \\ 0 & 0 & M_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} M_1 + M_2 + M_3 & \alpha M_1 + \alpha^2 M_2 + \alpha M_3 & \alpha^2 M_1 + \alpha M_2 + M_3 \\ \alpha^2 M_1 + \alpha M_2 + M_3 & M_1 + M_2 + M_3 & \alpha M_1 + \alpha^2 M_2 + \alpha M_3 \\ \alpha M_1 + \alpha^2 M_2 + \alpha M_3 & \alpha^2 M_1 + \alpha M_2 + M_3 & M_1 + M_2 + M_3 \end{pmatrix} \doteq \begin{pmatrix} M^0 & M^- & M^+ \\ M^+ & M^0 & M^- \\ M^- & M^+ & M^0 \end{pmatrix}$$

I generatori e utilizzatori trifase sono nel caso più generale dei quadripoli che comunicano attraverso i tre morsetti di linea ed il morsetto di neutro.. Si ha quindi nel complesso un sistema a quattro fili che costituisce un *doppio quadripolo*.

Se i morsetti del neutro del generatore e dell'utilizzatore non esistono, vengono soppressi o sono sopprimibili (circuito simmetrico e bilanciato) il doppio quadripolo si trasforma in doppio tripolo. Il tripolo collegato a stella si ottiene dal quadripolo sopprimendo il neutro, mentre quello collegato a triangolo si ottiene dal precedente applicando la trasformazione stella-triangolo.

Consideriamo il caso della configurazione stella-stella (non necessariamente simmetrica e bilanciata), descrivibile tramite due terne di variabili fisiche: le *tensioni di fase* e le *correnti di linea*. Esse sono legate dalla seguente:

$$\bar{\mathbf{E}} = \bar{\mathbf{Z}}\bar{\mathbf{I}} \quad \bar{\mathbf{I}} = \bar{\mathbf{Y}}\bar{\mathbf{E}} \quad \bar{\mathbf{Y}} = \bar{\mathbf{Z}}^{-1}$$

Dalla trasformazione in componenti simmetriche dei vettori di tensione e corrente avremo:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{E}}_s &= \bar{\mathbf{Z}}_s \bar{\mathbf{I}}_s & \bar{\mathbf{I}}_s &= \bar{\mathbf{Y}}_s \bar{\mathbf{E}}_s \\ \bar{\mathbf{Y}}_s &= \frac{1}{3} \bar{\mathbf{S}}^\dagger \bar{\mathbf{Y}} \bar{\mathbf{S}} & \bar{\mathbf{Y}} &= \frac{1}{3} \bar{\mathbf{S}} \bar{\mathbf{Y}}_s \bar{\mathbf{S}}^\dagger \\ \bar{\mathbf{Z}}_s &= \frac{1}{3} \bar{\mathbf{S}}^\dagger \bar{\mathbf{Z}} \bar{\mathbf{S}} & \bar{\mathbf{Z}} &= \frac{1}{3} \bar{\mathbf{S}} \bar{\mathbf{Z}}_s \bar{\mathbf{S}}^\dagger \end{aligned}$$

Nel caso più comune sono assegnate le tensioni concatenate ai morsetti del quadripolo. In questo modo, per i risultati precedenti, si può dire di conoscere le componenti \bar{E}^+ , \bar{E}^- del vettore $\bar{\mathbf{E}}$. La componente omopolare \bar{E}^0 può essere determinata osservando che detta \bar{E}_g^0 la tensione omopolare delle tensioni stellate del generatore (supposta nota) e \bar{Z}_0 l'impedenza del neutro si ha:

$$\bar{E}^0 = \bar{E}_g^0 - \bar{Z}_0 \bar{I}_0$$

La trasformazione delle variabili fisiche alle componenti simmetriche ha un interesse reale solo quando semplifica la rappresentazione delle matrici ammettenza e impedenza, portandole a forma diagonale. Secondo i risultati visti in precedenza, dobbiamo presupporre che tali matrici siano cicliche: si parla quindi di *quadripoli ciclici*.

Potenza elettrica in componenti simmetriche

Tenendo conto dell'espressione della potenza complessa precedentemente considerata e la decomposizione in componenti simmetriche di Fortesque possiamo scrivere:

$$\bar{S} = \bar{\mathbf{I}}^\dagger \bar{\mathbf{V}} = \bar{\mathbf{I}}_s^\dagger \bar{\mathbf{S}}^\dagger \bar{\mathbf{S}} \bar{\mathbf{E}}_s = 3 \bar{\mathbf{I}}_s^\dagger \bar{\mathbf{E}}_s$$

Possiamo quindi affermare che:

La potenza attiva e reattiva ai morsetti di un quadripolo o di un tripolo in regime di tensioni dissimmetriche e correnti squilibrate, sono le somme delle potenze attive e reattive delle tre componenti, diretta inversa e omeopolare moltiplicate per 3.

$$\bar{S} = \bar{E}_1 \bar{I}_1^* + \bar{E}_2 \bar{I}_2^* + \bar{E}_3 \bar{I}_3^* = 3 \left(\bar{E}^+ \bar{I}^{+*} + \bar{E}^- \bar{I}^{-*} + \bar{E}^0 \bar{I}^{0*} \right)$$

Nei sistemi trifase a tre fili vale $\bar{I}^0 = 0$, pertanto la componente omeopolare delle tensioni stellate non è associata ad alcuna potenza. Da ciò deriva che:

La potenza di un sistema trifase a tre fili è invariante rispetto alla scelta del punto di riferimento delle tensioni stellate.

Le misure di potenza nei sistemi di fase a tre fili possono farsi con il *metodo dei due wattmetri*, o *metodo di Aron*. Eccolo qui di seguito descritto:

Si consideri un circuito trifase a tre fili, composto da un generatore, una linea ed un utilizzatore e siano W_{13} , W_{23} due wattmetri con i morsetti ampermetrici inseriti in serie rispettivamente ai fili 1 e 2 e i morsetti voltmetrici collegati in derivazione rispettivamente tra quelli e il filo 3 della linea. Siano P_{13} , P_{23} le potenze attive misurate dai due wattmetri.

La potenza attiva P trasportata dalla linea è, comunque dissimetrico e squilibrato sia il sistema, data dall'espressione:

$$P = P_{13} + P_{23}$$

La potenza reattiva è invece data (nel solo caso di simmetria e equilibratura del sistema) da:

$$Q = \sqrt{3}(P_{13} - P_{23})$$

Infatti, se scegliamo il filo 3 come riferimento delle tensioni stellate, avremo $\bar{E}_1 = \bar{V}_{13}$, $\bar{E}_2 = \bar{V}_{23}$ e la potenza complessa si riduce a:

$$\bar{S} = \bar{E}_1 \bar{I}_1^* + \bar{E}_2 \bar{I}_2^* = 3(\bar{E}^+ \bar{I}^{+*} + \bar{E}^- \bar{I}^{-*})$$

che equivale a dire:

$$P = \text{Re} \bar{S} = \text{Re}(\bar{V}_{13} \bar{I}_1^* + \bar{V}_{23} \bar{I}_2^*) = P_{13} + P_{23}$$

Il fatto di scegliere il filo 3 come riferimento è ammissibile visto che la scelta del centro stella fittizio non fa altro che determinare la componente omopolare della terna di tensioni stellate. Tale componente ha corrente nulla nei sistemi a tre fili, quindi non incide sul calcolo della potenza attiva. La scelta del riferimento è quindi libera e possiamo usare solo due wattmetri.

Supponendo ora il sistema simmetrico e equilibrato e tenendo conto delle relazioni:

$$\bar{V}_{13} = e^{-j\frac{\pi}{6}} \bar{E}_1 \quad \bar{V}_{23} = e^{j\frac{\pi}{6}} \bar{E}_2$$

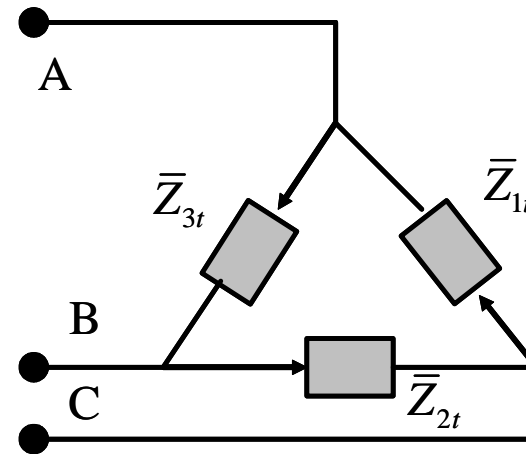
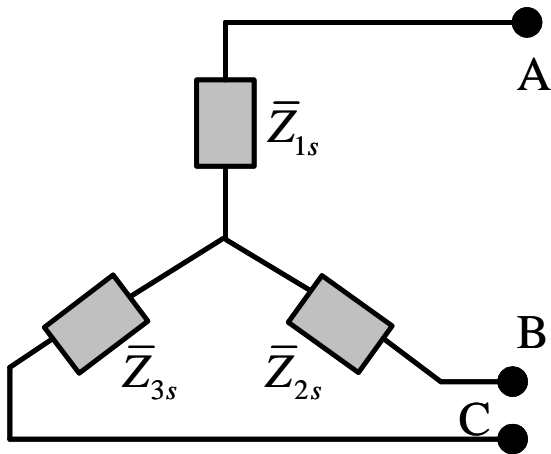
possiamo derivare la seguente:

$$\begin{aligned}
P_{13} - P_{23} &= \operatorname{Re}(\bar{V}_{13}\bar{I}_1^* - \bar{V}_{23}\bar{I}_2^*) = \\
&= \sqrt{3} \left[\operatorname{Re} \left(e^{-j\frac{\pi}{6}} \bar{E}_1 \bar{I}_1^* \right) - \operatorname{Re} \left(e^{j\frac{\pi}{6}} \bar{E}_2 \bar{I}_2^* \right) \right] = \\
&= \sqrt{3} \left[\operatorname{Re} \left(E I e^{(\varphi - j\frac{\pi}{6})} - E I e^{(\varphi + j\frac{\pi}{6})} \right) \right] = \sqrt{3} E I \left[\cos \left(\varphi - \frac{\pi}{6} \right) - \cos \left(\varphi + \frac{\pi}{6} \right) \right] = \\
&= \sqrt{3} E I \sin(\varphi) = E I \sin(\varphi) = \frac{Q}{\sqrt{3}}
\end{aligned}$$

*È facile dimostrare (come intuire per analogia) che l'inserzione di due **varmetri** secondo Aron permette di calcolare la potenza reattiva di un sistema trifase a tre fili comunque dissimetrico e squilibrato.*

Il metodo di Aron si estende facilmente al caso di sistemi trifasi a quattro fili, facendo uso di tre wattmetri per le misure di potenza attiva e di tre varmetri per le misure di potenza reattiva, con i morsetti ampermetrici in serie ai fili 1,2,3 e i morsetti voltmetrici in derivazione fra detti fili e il neutro.

Trasformazioni stella-triangolo e triangolo-stella



STELLA-TRIANGOLO

$$\begin{cases} Z_{1t} = \frac{Z_{1s}Z_{2s}}{Z_{3s}} + Z_{1s} + Z_{2s} \\ Z_{2t} = \frac{Z_{2s}Z_{3s}}{Z_{1s}} + Z_{2s} + Z_{3s} \\ Z_{3t} = \frac{Z_{3s}Z_{1s}}{Z_{2s}} + Z_{3s} + Z_{1s} \end{cases}$$

TRIANGOLO-STELLA

$$\left\{ \begin{array}{l} Z_{1s} = \frac{Z_{1t}Z_{3t}}{Z_{1t} + Z_{2t} + Z_{3t}} \\ Z_{2s} = \frac{Z_{1t}Z_{2t}}{Z_{1t} + Z_{2t} + Z_{3t}} \\ Z_{3s} = \frac{Z_{2t}Z_{3t}}{Z_{1t} + Z_{2t} + Z_{3t}} \end{array} \right.$$
