EQUAZIONI DI MAXWELL

1°)
$$\nabla \cdot E = \rho/\varepsilon$$

Dim. Dalla legge di Gauss:

$$\oint_S \vec{E}\, dS = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

e dalla definizione di Q_{int}

$$Q_{int} = \int_V \rho\, dV$$

ove V è il volume contenuto in S, possiamo scrivere:

$$\oint_S \vec{E}\, dS = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho\, dV$$

Ricordando il teorema della divergenza:

$$\oint_S \vec{A}\, dS = \int_V (\nabla \cdot \vec{A})\, dV \quad \begin{cases} V \text{ contenuto in } S \\ \vec{A} \text{ generico campo vettoriale} \end{cases}$$

possiamo scrivere:

$$\oint_S \vec{E}\, dS = \int_V (\nabla \cdot \vec{E})\, dV = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho \cdot dV$$

da cui si ottiene la 1° equaz. di Maxwell:

$$\nabla \cdot E = \frac{\rho}{\varepsilon}$$

□

Per una regione priva di cariche $\rho = 0 \Rightarrow \nabla \cdot E = 0$

...

2°) $\nabla \cdot H = 0$

La legge di Gauss per il campo magnetico afferma che non esiste il monopolo magnetico, per cui il flusso magnetico netto attraverso una superficie chiusa è sempre nullo

$$\oint_S \vec{H} dS = 0$$

Ricordando il teorema della divergenza abbiamo:

$$\oint_S \vec{H} dS = \int_V (\nabla \cdot H) dV = 0$$

da cui otteniamo la 2° equaz. di Maxwell

$$\nabla \cdot H = 0$$

$\square$

...

3°)

$$\nabla \times E = -\mu \frac{\partial}{\partial t} H$$

consideriamo un circuito chiuso di lunghezza ℓ e un campo magnetico B variabile nel tempo, che incide (non-parallelamente) sulla superficie delimitata dal circuito.
Per la legge di induzione di Faraday, sul circuito si istaura una f.e.m data da:

$$fem = -\frac{d}{dt}\phi_B$$

in cui il flusso magnetico ϕ_B è dato da:

$$\phi_B = \oint_S \vec{B}\,\hat{n}\,dS$$

La f.e.m è una ddp tra ogni punto del circuito e genera un campo elettrico $\vec{E}$ per il quale:

$$f.e.m = \oint_\ell \vec{E}\,d\ell$$

Eguagliando le tre equazioni precedenti ottengo:

$$\oint_\ell \vec{E}\,d\ell = -\frac{d}{dt}\oint_S \vec{B}\cdot\hat{n}\,dS$$

Per il teorema di Stokes: sia ℓ un circuito chiuso e S una superficie aperta, delimitata da ℓ; e sia $\vec{A}$ un campo vettoriale

$$\oint_\ell \vec{A}\,d\ell = \oint_S (\nabla\times\vec{A})\cdot\hat{n}\,dS$$

...

→

Applico il teorema di Stokes:

$$\oint_{\ell} \vec{E} d\ell = \oint_{S} (\nabla \times \vec{E}) \cdot \hat{n} \, dS = -\frac{d}{dt} \oint_{S} \vec{B} \cdot \hat{n} \, dS \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \oint_{S} \left[\nabla \times \vec{E} + \frac{d}{dt} \vec{B} \right] \hat{n} \, dS = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \nabla \times \vec{E} = -\frac{d}{dt} \vec{B}$$

Sostituendo $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$ e considerando che H sia dipendente non solo dal tempo, otteniamo la 3° equazione di Maxwell:

$$\nabla \times E = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} H$$

$\square$