SOLUZIONI DELLE EQUAZIONI DI MAXWELL

Consideriamo un mezzo lineare, omogeneo e isotropo in cui non ci sono sorgenti $\rho = 0$, $J = 0$ e supponiamo che i campi E e H siano dipendenti solo dalla coordinata z e dal tempo:

$$E = E(z;t) \qquad H = H(z;t)$$

Sviluppo $\nabla \times E$:

$$\nabla \times E = \det \begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ \partial/\partial_x & \partial/\partial_y & \partial/\partial_z \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial_x} = \frac{\partial}{\partial_y} = 0 \text{ perché i dipende so}$$

lo da z e t $\Rightarrow \nabla \times E = -u_x \frac{\partial}{\partial z} E_y + u_y \frac{\partial}{\partial z} E_x$

Eguaglio: $\nabla \times E = -\mu \frac{\partial}{\partial t} H$:

$$\#1 \qquad \frac{\partial}{\partial z} E_y = \mu \frac{\partial}{\partial t} H_x \quad ; \quad \frac{\partial}{\partial z} E_x = -\mu \frac{\partial}{\partial t} H_y \qquad \#2$$

analogamente:

$$\nabla \times H = -u_x \frac{\partial}{\partial z} H_y + \frac{\partial}{\partial z} u_y H_x$$

Eguaglio: $\nabla \times H = \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} E$:

$$\#3 \qquad \frac{\partial}{\partial z} H_y = -\varepsilon \frac{\partial}{\partial t} E_x \quad , \quad \frac{\partial}{\partial z} H_x = \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} E_y \qquad \#4$$

Ora derivo rispetto a z la #2

$$\frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} E_x = -\mu \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial t} H_y$$

e, sostituendo la #3:

$$\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial z}E_x = -\mu\frac{\partial}{\partial t}\left(-\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}E_x\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial z^2}E_x = \mu\varepsilon\frac{\partial^2}{\partial t^2}E_x$$

Ho ottenuto l'equazione d'onda per il campo elettrico. La soluzione di questa equazione è la somma di due funzioni che rappresentano il campo elettrico progressivo e quello regressivo:

$$E_x = E_x^+ + E_x^- = f^+\left(t-\frac{z}{v}\right) + f^-\left(t+\frac{z}{v}\right)$$

v è la velocità di propagazione dell'onda ed è così definita:

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(f^\pm\left(t\mp\frac{z}{v}\right)\right) = \mu\varepsilon\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(f^\pm\left(t\mp\frac{z}{v}\right)\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{v^2}f''^\pm\left(t\mp\frac{z}{v}\right) = \mu\varepsilon f''^\pm\left(t-\frac{z}{v}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{v^2} = \mu\varepsilon \Rightarrow v = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$$

Nel vuoto: $\mu=\mu_0$ e $\varepsilon=\varepsilon_0$: $v = c = 3\cdot10^8$ m/s (Velocità della luce).

...

RELAZIONE TRA E E H

Dalle eq. di Maxwell:

$$\frac{\partial}{\partial z} E_x = -\mu \frac{\partial}{\partial t} H_y$$

ricavo:

$$\frac{\partial}{\partial t} H_y = -\frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial z} E_x =$$

$$= -\frac{1}{\mu} \cdot \frac{1}{v} \left[-f^{+'}\left(t - \frac{z}{v}\right) + f^{-'}\left(t + \frac{z}{v}\right) \right] = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \left[f^{+'}\left(t - \frac{z}{v}\right) - f^{-'}\left(t - \frac{z}{v}\right) \right]$$

$$\Rightarrow \quad H_y = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \left[f^{+}\left(t - \frac{z}{v}\right) - f^{-}\left(t - \frac{z}{v}\right) \right] = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \left(E_x^+ - E_x^- \right)$$

La quantità $\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$ è detta IMPEDENZA D'ONDA e si indica con la lettera greca η (eta)

Nel vuoto $(\varepsilon_0; \mu_0)$: $\eta = \eta_0 = 377\ \Omega$

Dall' eq. di Maxwell

$$\frac{\partial}{\partial z} E_y = \mu \frac{\partial}{\partial t} H_x$$

ricavo:

$$\frac{\partial}{\partial t} H_x = \frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial z} E_y$$

...