

## SOLUZIONI DELLE EQUAZIONI DI MAXWELL

Consideriamo un mezzo lineare, omogeneo e isotropo in cui non ci sono sorgenti:  $\rho=0$ ,  $J=0$  e supponiamo che i campi  $E$  e  $H$  siano dipendenti solo dalla coordinata  $z$  e dal tempo:

$$E = E(z; t) \quad H = H(z; t)$$

Sviluppo  $\nabla \times E$ :

$$\nabla \times E = \det \begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} = 0 \text{ perché } \epsilon \text{ dipende solo}$$

$$\text{da } z \text{ e } t \Rightarrow \nabla \times E = -u_x \frac{\partial}{\partial z} E_y + u_y \frac{\partial}{\partial z} E_x$$

$$\text{Eguaglio: } \nabla \times E = -\mu \frac{\partial}{\partial t} H:$$

$$\#1 \quad \frac{\partial}{\partial z} E_y = \mu \frac{\partial}{\partial t} H_x \quad ; \quad \frac{\partial}{\partial z} E_x = -\mu \frac{\partial}{\partial t} H_y \quad \#2$$

analogamente:

$$\nabla \times H = -u_x \frac{\partial}{\partial z} H_y + \frac{\partial}{\partial z} u_y H_x$$

$$\text{Eguaglio: } \nabla \times H = \epsilon \frac{\partial}{\partial t} E:$$

$$\#3 \quad \frac{\partial}{\partial z} H_y = \epsilon \frac{\partial}{\partial t} E_x \quad , \quad \frac{\partial}{\partial z} H_x = \epsilon \frac{\partial}{\partial t} E_y \quad \#4$$

Ora derivo rispetto a  $z$  la #2

$$\frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} E_x = -\mu \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial t} H_y$$

e, sostituendo la #3:

$$\frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} E_x = -\mu \frac{\partial}{\partial t} \left( -\epsilon \frac{\partial}{\partial t} E_x \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial z^2} E_x = \mu \epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} E_x$$

Ho ottenuto l'equazione d'onda per il campo elettrico. La soluzione di questa equazione è la somma di due funzioni che rappresentano il campo elettrico progressivo e quello regressivo:

$$E_x = E_x^+ + E_x^- = f^+ \left( t - \frac{z}{v} \right) + f^- \left( t + \frac{z}{v} \right)$$

$v$  è la velocità di propagazione dell'onda ed è così definita:

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \left( f^\pm \left( t \mp \frac{z}{v} \right) \right) = \mu \epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( f^\pm \left( t \mp \frac{z}{v} \right) \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{v^2} f^{\pm\prime\prime} \left( t \mp \frac{z}{v} \right) = \mu \epsilon f^{\pm\prime\prime} \left( t \mp \frac{z}{v} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{v^2} = \mu \epsilon \Rightarrow v = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}}$$

Nel vuoto:  $\mu = \mu_0$  e  $\epsilon = \epsilon_0$ :  $v = c = 3 \cdot 10^8$  m/s (velocità della luce).

## RELAZIONE TRA E E H

Dalle eq. di Maxwell:

$$\frac{\partial}{\partial z} E_x = -\mu \frac{\partial}{\partial t} H_y$$

ricavo:

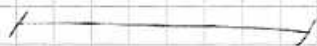
$$\frac{\partial}{\partial t} H_y = -\frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial z} E_x =$$

$$= -\frac{1}{\mu} \cdot \frac{1}{v} \left[ -f^{+'} \left( t - \frac{z}{v} \right) + f^{-'} \left( t + \frac{z}{v} \right) \right] = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \left[ f^{+'} \left( t - \frac{z}{v} \right) - f^{-'} \left( t - \frac{z}{v} \right) \right]$$

$$\Rightarrow H_y = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \left[ f^+ \left( t - \frac{z}{v} \right) - f^- \left( t - \frac{z}{v} \right) \right] = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} (E_x^+ - E_x^-)$$

La quantità  $\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$  è detta IMPEDENZA D'ONDA e si indica con la lettera greca  $\eta$  (eta)

Nel vuoto ( $\epsilon_0, \mu_0$ ):  $\eta = \eta_0 = 377 \Omega$



Dall'eq. di Maxwell

$$\frac{\partial}{\partial z} E_y = \mu \frac{\partial}{\partial t} H_x$$

ricavo:

$$\frac{\partial}{\partial t} H_x = \frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial z} E_y$$

