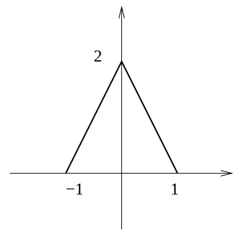
Esercizi sulle serie e trasformate di Fourier

Esercizio 1 *Calcolare lo sviluppo in serie di Fourier del segnale* 2*-periodico* u *che nell'intervallo* $(-1,1)$ *vale* $u(t) := 1-t^2$. *Disegnare il segnale* 2*-periodico* v *che nel medesimo intervallo vale* $1-(|t|-1)^2$. *Dedurre lo sviluppo di* v *da quello di* u. *(*) Calcolare* $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n/n^2$.

Esercizio 2 *Sia* $u(t) = cos2t - 4\sin 8t + 3\cos 20t$. *Calcolare* $\int_{\pi}^{5\pi} u^2(t)\,dt$.

Esercizio 3 *Sia* u *il segnale*



Disegnare $v(t) = u(t) + u(t-1) + u(t-2)$, $w(t) = u(t) + 2u(t-1) + u(t-2)$, $z(t) = w(t) - u(t)$ *e calcolarne la trasformata di Fourier. Esprimere* $w(t)$ *nella forma* $\alpha u(\beta t + \gamma)$ *per opportune* α, β, γ. *Determinare poi lo sviluppo in serie di Fourier del segnale* $\tilde{v}$ 4*-periodico che coicide con* v *sull'intervallo* $(-1,3)$.

Esercizio 4 *Calcolare*

$$\lim_{R\to+\infty} \int_0^R \operatorname{sinc}(4f)\cos(4\pi f)\,df, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(\pi f)^4}{f^2}\,df.$$

Esercizio 5 *Calcolare la trasformata di Fourier dei segnali*

$$u(t) = te^{-\pi t^2}, \quad v(t) = e^{t^2-4t}, \quad w(t) = \cos(2\pi t)e^{-4\pi t^2+4}.$$

Esercizio 6 *Sapendo che*

$$t = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cos nt \quad \text{per } 0 < t < \pi,$$

calcolare la somma $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cos nt$ *per ogni valore di* $t \in \mathbb{R}$ *e*

$$v(t) := \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n \cos(nt)$$

Calcolare la somma $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2$. *(*) Quanto vale* $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n a_n^2$*?*

Esercizio 7 *Calcolare la trasformata di Fourier dei segnali*

$$u(t) := |t|e^{-|t|}, \quad v(t) := H(t)\sin(2\pi t)e^{-2\pi t}, \quad w(t) := \sin(2\pi|t|)e^{-2\pi|t|}, \quad z(t) := \sin(2\pi t)e^{-2\pi|t|}.$$

Esercizio 8 *Dire quali dei seguenti segnali sono traformabili secondo Fourier e quanto sarà regolare la trasformata.*

$$u_1(t) = \frac{1}{t^2+1}, \quad u_2(t) = 1, \quad u_3(t) = \frac{1}{t^2}, \quad u_4(t) = e^{-t^4}, \quad u_5(t) = \frac{1}{1+t^6}$$