

Esercizi di Teoria dei Segnali

La Trasformata di Fourier

Esercizio 1

Calcolare la trasformata di Fourier del segnale di fig. 1.1.

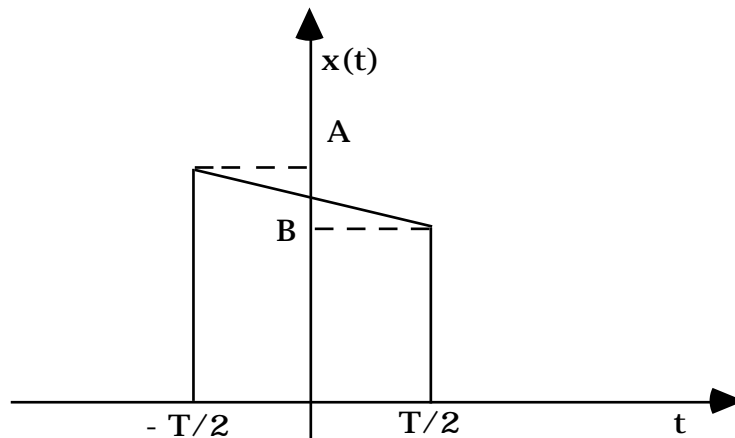


fig.1.1

Per calcolare la trasformata di questo segnale si può operare in più modi diversi; il primo prevede di applicare direttamente la definizione di trasformata al segnale che si può scrivere come:

$$x(t) = \left(\frac{A+B}{2} - \frac{A-B}{T} t \right) \text{rect}_T(t)$$

Si deve pertanto risolvere l'integrale:

$$X(f) = \int_{-T/2}^{T/2} \left(\frac{A+B}{2} - \frac{A-B}{T} t \right) e^{-j 2 \pi f t} dt$$

che si può scrivere come:

$$X(f) = \frac{A+B}{2} T \text{sinc}(\pi f T) - \frac{A-B}{T} \int_{-T/2}^{T/2} t e^{-j 2 \pi f t} dt$$

Tenendo conto della simmetria dell'intervallo di integrazione, tale espressione diventa:

$$X(f) = \frac{A+B}{2} T \text{sinc}(\pi f T) + 2j \frac{A-B}{T} \int_0^{T/2} t \sin(2 \pi f t) dt$$

L'integrale presente in questa espressione può risolversi per parti :

$$X(f) = \frac{A+B}{2} T \text{sinc}(\pi f T) - 2j \frac{A-B}{T} \frac{T}{2} \cos(\pi f T) +$$

$$+ 2j \frac{A-B}{T} \int_0^{T/2} \cos(2 \pi f t) dt$$

e infine:

$$\begin{aligned}
X(f) &= \frac{A+B}{2} T \operatorname{sinc}(fT) - j \frac{A-B}{2} T \cos(fT) + \\
&+ 2j \frac{A-B}{T(2f)^2} \sin(fT) = \\
X(f) &= \frac{A+B}{2} T \operatorname{sinc}(fT) + \frac{A-B}{2j f} \cos(fT) + \\
&- \frac{A-B}{(2j f)} \operatorname{sinc}(fT)
\end{aligned}$$

Si può osservare che il calcolo non è difficile, ma è piuttosto laborioso. Per semplificare il calcolo si può ricorrere ad una importante proprietà della trasformata di Fourier, quella secondo cui se ad $x(t)$ corrisponde $X(f)$, allora a $dx(t)/dt$ corrisponde $j2\pi f X(f)$. Indicando con $D(f)$ la trasformata di $dx(t)/dt$, al segnale corrisponde come trasformata la quantità $D(f)/j2\pi f$.

La derivata del segnale è riportata nella fig.1.2 e si può scrivere come:

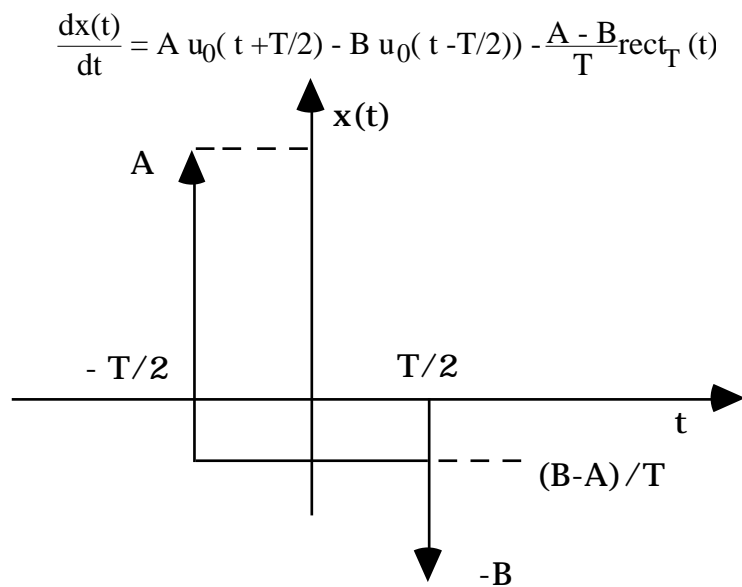


Fig.1.2

Questa quantità è facilmente trasformabile:

$$D(f) = A e^{j\pi fT} - B e^{-j\pi fT} - (A-B) \operatorname{sinc}(fT)$$

e quindi:

$$X(f) = \frac{A e^{j\pi fT} - B e^{-j\pi fT}}{j2\pi f} - \frac{(A-B) \operatorname{sinc}(fT)}{j2\pi f}$$

Con qualche manipolazione si può ricondurre questa espressione all'altra calcolata in precedenza; infatti:

$$\begin{aligned}
X(f) &= \frac{(A+B+A-B)}{2} \frac{e^{j fT} - (A+B-A+B)}{2} \frac{e^{-j fT}}{j 2 f} - \frac{(A-B)\text{sinc}(fT)}{j 2 f} = \\
&= \frac{(A+B)}{2} \frac{(e^{j fT} - e^{-j fT})}{j 2 f} + \frac{(A-B)}{2} \frac{(e^{-j fT} + e^{-j fT})}{j 2 f} - \frac{(A-B)\text{sinc}(fT)}{j 2 f} = \\
&= \frac{(A+B)}{2} \frac{\sin(fT)}{f} + (A-B) \frac{\cos(fT)}{j 2 f} - (A-B) \frac{\text{sinc}(fT)}{j 2 f}
\end{aligned}$$

Comunque si può scrivere per lo spettro di densità di energia:

$$|X(f)|^2 = \frac{(A-B)^2 [\cos(fT) - \text{sinc}(fT)]^2 + (A+B)^2 \sin^2(fT)}{(2f)^2}$$

e per lo spettro di fase:

$$\phi(f) = \text{tg}^{-1} \frac{(A+B)\sin(fT)}{(A-B)[\cos(fT) - \text{sinc}(fT)]} - \frac{\pi}{2}$$

Nelle tre figure che seguono vengono riportati gli andamenti dello spettro di ampiezza assumendo sempre $A + B = 3$, $T = 1$ ma per diversi valori di B

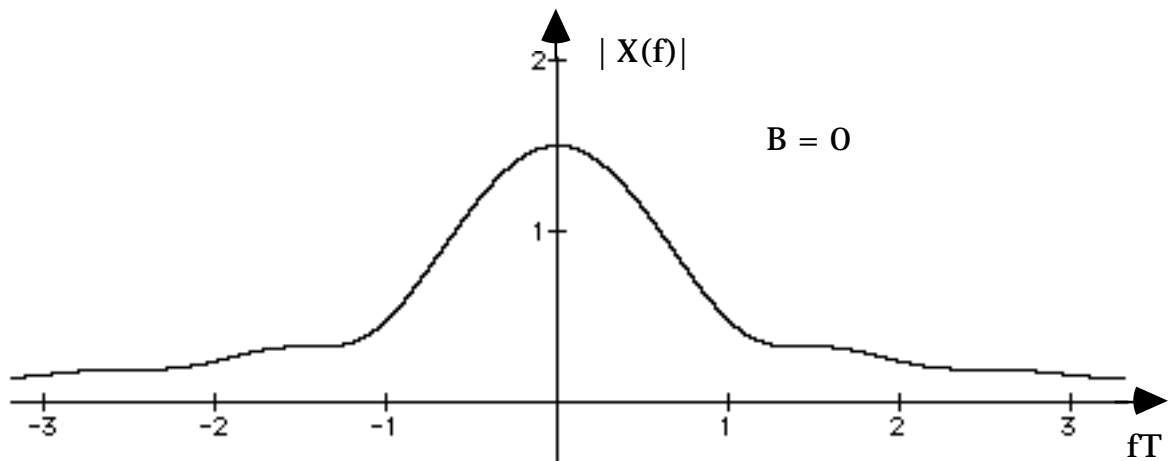


fig.1.3

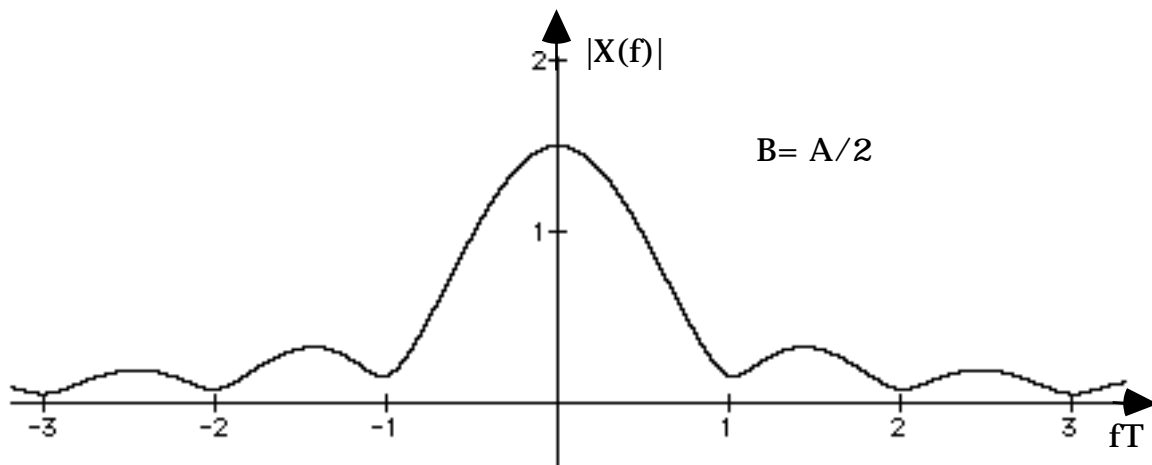


fig.1.4

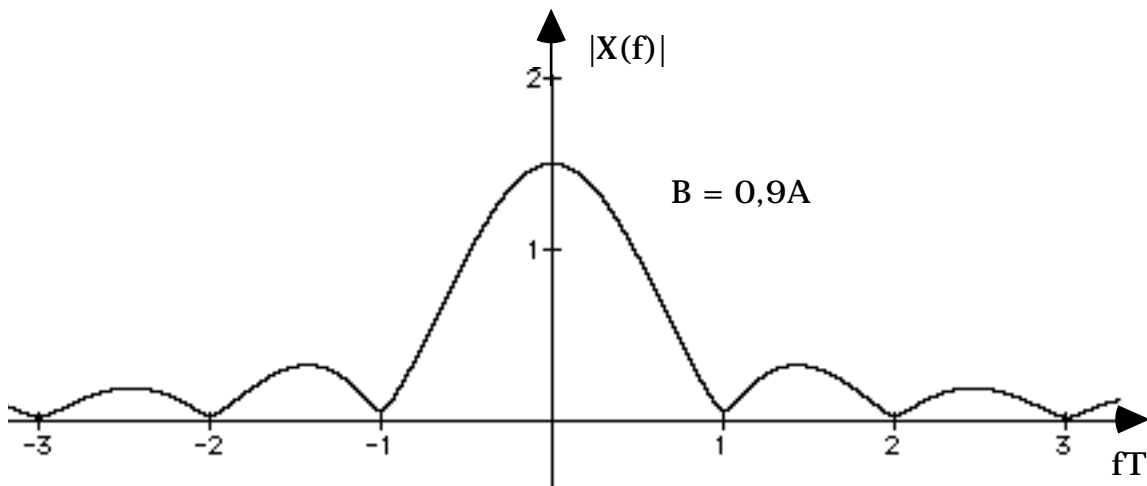


fig 1.5

Si può verificare come al tendere di B ad A lo spettro tende a quello di un impulso rettangolare di ampiezza $(A+B)/2$.

Il caso $B = 0$ è quello per cui l'impulso degenera in un triangolo (fig. 1.6) che ha come trasformata:

$$X(f) = \frac{A}{j2f} e^{j fT} - \frac{A}{j2f} e^{-j fT} = \frac{A \operatorname{sinc}(fT)}{j2f}$$

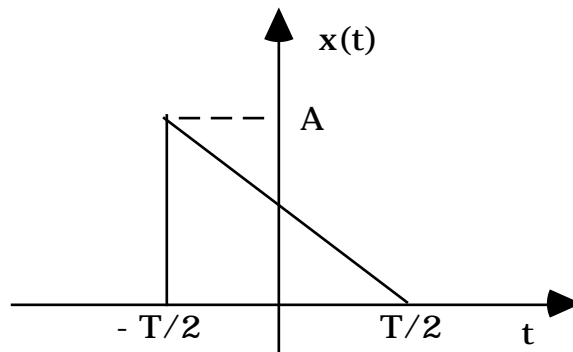


Fig.1.6

Un'ultima osservazione è legata alla possibilità di decomporre il segnale nella somma di due addendi più semplici; si può infatti pensare il segnale in esame come la somma di un rettangolo di ampiezza $(A+B)/2$ e del segnale $s(t)$:

$$s(t) = - \frac{A-B}{T} t \text{ rect}_T(t)$$

Ricordando le regole della derivazione in frequenza si può individuare una terza via per la soluzione del problema.

Esercizio 2

Calcolare la trasformata di Fourier del segnale di fig. 2.1.

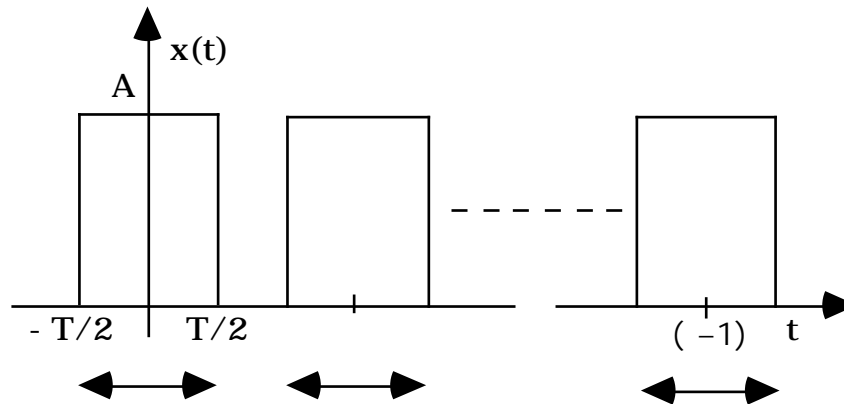


Fig.2.1

Il segnale è un treno di N impulsi di ampiezza A , distanti l'uno dall'altro di T secondi.

$$x(t) = A \sum_{k=0}^{N-1} \text{rect}_T(t - kT)$$

Per la soluzione di questo esercizio si ricorre alla linearità della trasformata consentendo così di scrivere:

$$X(f) = AT \text{sinc}(\pi fT) \sum_{k=0}^{N-1} e^{-j2\pi f kT}$$

La somma che compare nella formula dello spettro è una successione geometrica di ragione $e^{-j2\pi f T}$, allora si può ancora scrivere:

$$\begin{aligned} X(f) &= AT \text{sinc}(\pi fT) \frac{1 - e^{-j2\pi f N T}}{1 - e^{-j2\pi f T}} = AT \frac{e^{-j\pi f N T}}{e^{-j\pi f T}} \text{sinc}(\pi fT) \frac{e^{j\pi f N T} - e^{-j\pi f N T}}{e^{j\pi f T} - e^{-j\pi f T}} = \\ &= AT e^{-j\pi f(N-1)T} \text{sinc}(\pi fT) \frac{\sin(\pi f N T)}{\sin(\pi f T)} \end{aligned}$$

Lo spettro di ampiezza del treno di impulsi ha l'andamento riportato nelle figg. 2.2 e 2.3 con dettaglio differente.

Si è assunto $A=0,1$, $N=8$, $T=1$ e $\omega = 4$

Si può osservare come la regione significativa dello spettro sia definita ancora dall'inverso della durata del singolo impulso, si osservi lo zero dell'involuppo nella fig.2.2, ma anche che un ruolo importante è giocato dalla lunghezza totale dell'impulso (N). L'andamento intorno all'origine è infatti assimilabile a una funzione del tipo $N\text{sinc}(x)/x$.

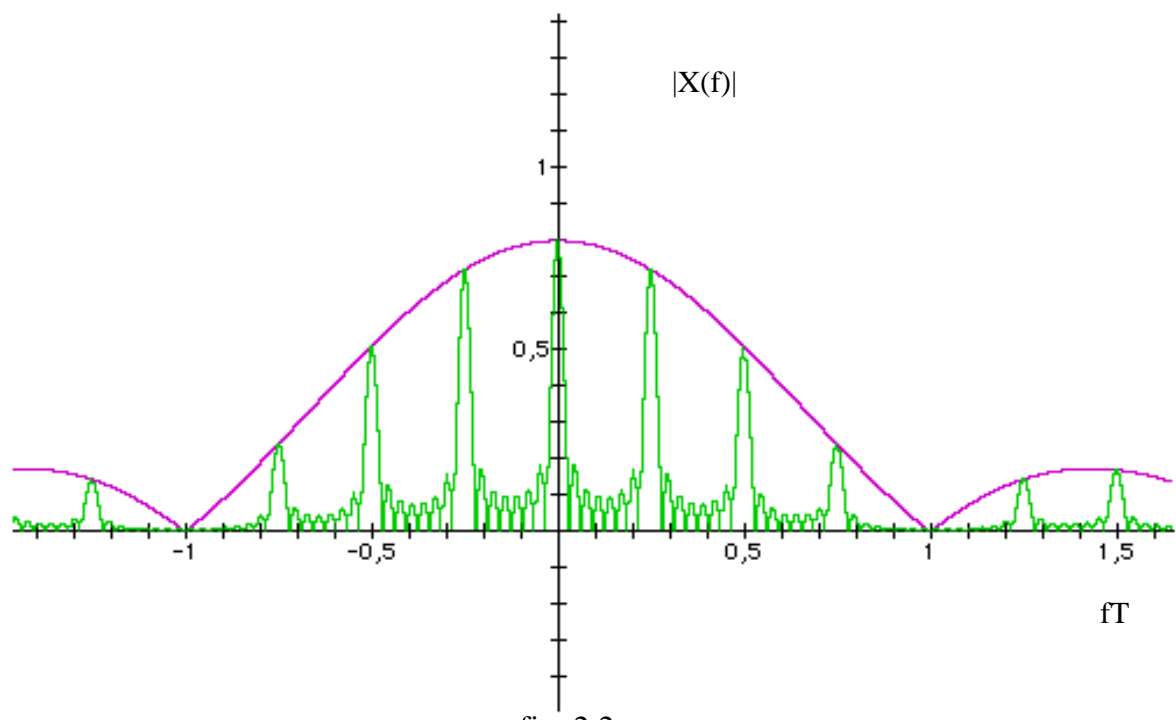


fig. 2.2

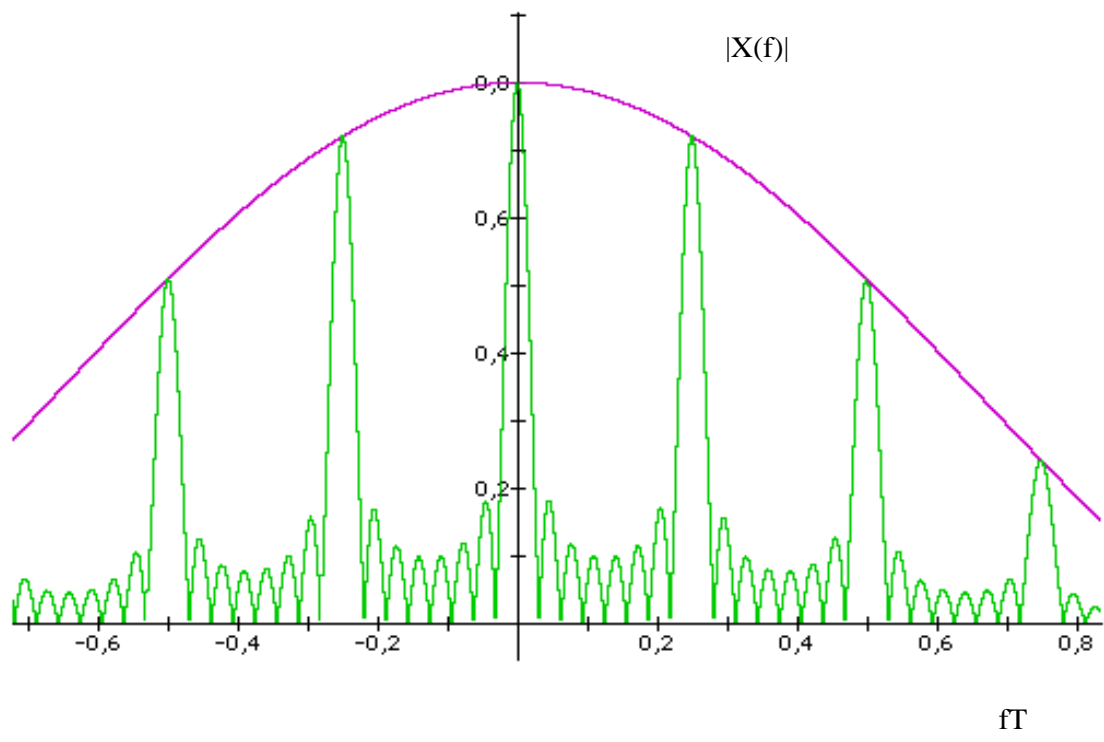


fig. 2.3

Esercizio 3

Calcolare la trasformata di Fourier del segnale di fig. 3.1.

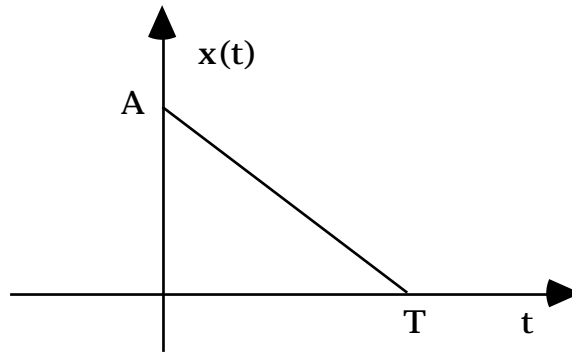


Fig.3.1

Per risolvere facilmente questo problema si può osservare come $x(t)$ sia decomponibile nella differenza tra un impulso rettangolare di durata T e un impulso triangolare.

$$x(t) = A \operatorname{rect}_T(t - \frac{T}{2}) - \frac{A}{T} t \operatorname{rect}_T(t - \frac{T}{2})$$

Poichè moltiplicare per $(-j2\pi t)$ significa derivare nel dominio della frequenza si può scrivere:

$$\begin{aligned} X(f) &= AT \operatorname{sinc}(fT) e^{-j\pi fT} + \frac{A}{j2\pi} \frac{d}{df} (\operatorname{sinc}(fT) e^{-j\pi fT}) = \\ &= AT \operatorname{sinc}(fT) e^{-j\pi fT} - j \frac{AT}{2} e^{-j\pi fT} \frac{d}{df} \operatorname{sinc}(fT) + \frac{A \operatorname{sinc}(fT)}{j2\pi} \frac{d}{df} e^{-j\pi fT} \end{aligned}$$

Quindi:

$$X(f) = \left(\frac{AT}{2} \operatorname{sinc}(fT) - j \frac{AT}{2} \frac{(\pi fT) \cos(\pi fT) - \sin(\pi fT)}{(\pi fT)^2} \right) e^{-j\pi fT}$$

Lo spettro di ampiezza è riportato nella fig. 3.2 nel caso in cui $A=6$ e $T=1$.

Si può osservare come lo spettro di ampiezza abbia il suo maggiore significato nell'intervallo compreso tra $-1/T$ e $1/T$, ritrovando la situazione dell'esercizio 1.

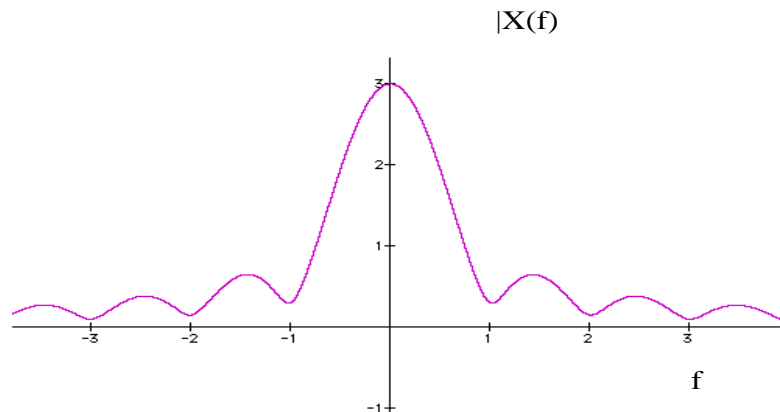


Fig.3.2

Esercizio 4

Calcolare la trasformata di Fourier del segnale

$$x(t) = 2 \operatorname{rect}_T(t) \cos\left(\frac{t}{T}\right)$$

riportato nella fig. 4.1 per $T=1$

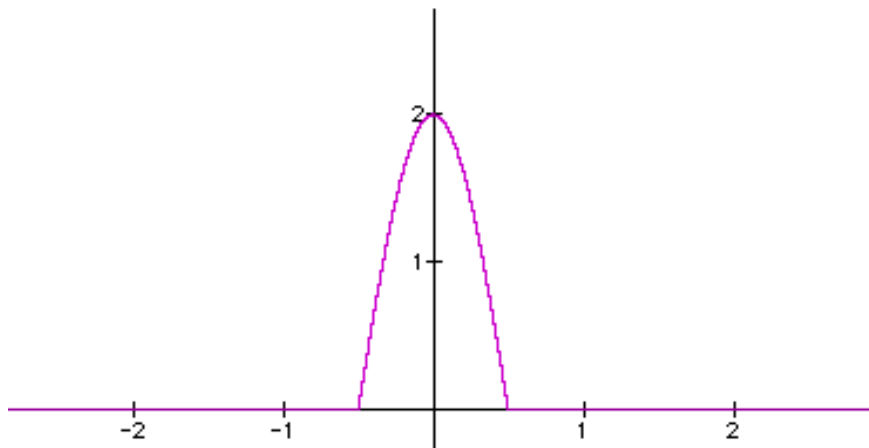


Fig. 4.1

Ricordando le formule di Eulero tale formula può risciversi come:

$$x(t) = \operatorname{rect}_T(t) (e^{j(t)/T} + e^{-j(t)/T})$$

Allora per lo spettro si avrà:

$$X(f) = T \{ \operatorname{sinc} [(f+1/2T)T] + \{ \operatorname{sinc} [(f-1/2T)T] \}$$

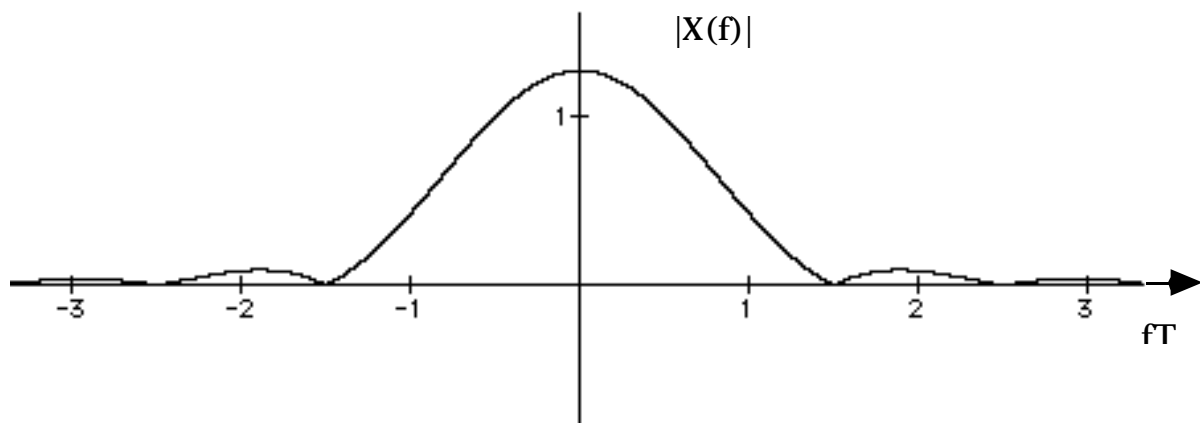


Fig. 4.2

Lo spettro di ampiezza è riportato nella fig. 4.2; la fig.4.3 mostra i due addendi che definiscono lo spettro. Si può facilmente notare la traslazione degli spettri.

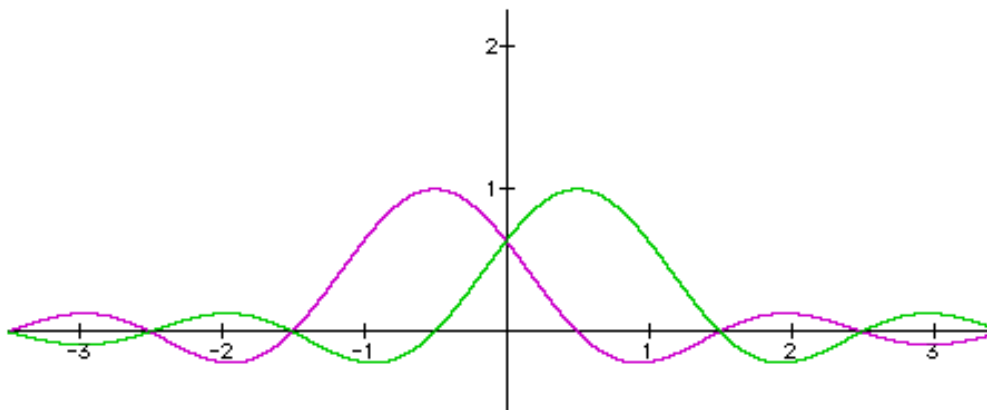


Fig. 4.3

Se si dimezza il periodo della sinusoida

$$x(t) = \text{rect}_T(t) \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right)$$

si ha il segnale riportato nella fig. 4.4 per $T=1$

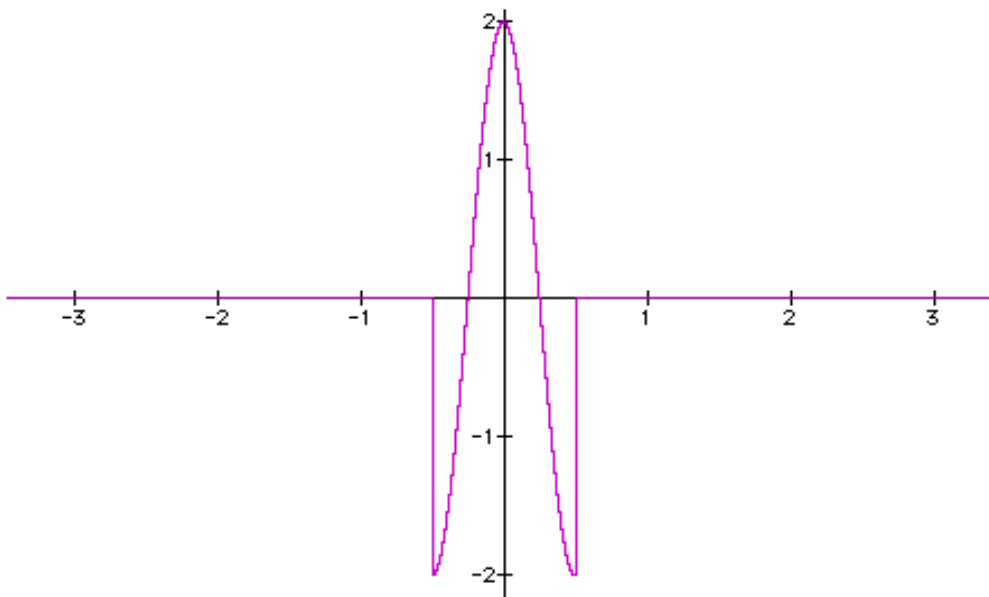


Fig. 4.4

Procedendo nello stesso modo si ha per lo spettro l'espressione:

$$X(f) = T\{\text{sinc}[\pi(f + T)/T] + \text{sinc}[\pi(f - T)/T]\}$$

il cui modulo è riportato nella fig.4.5 per $T=1$.

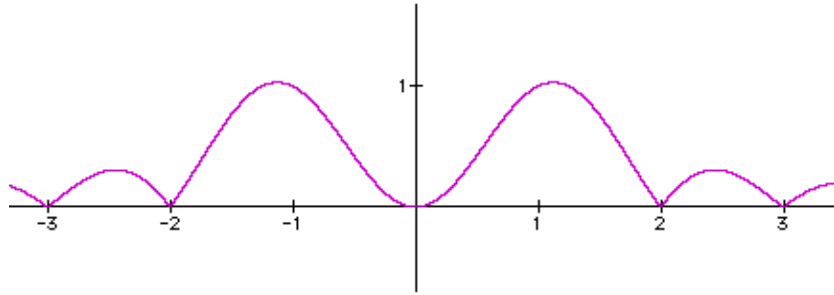


fig.4.5

Confrontando gli spettri si può osservare la loro grande differenza, che si manifesta ancora di più se il periodo del coseno è ulteriormente dimezzato (fig.4.6)

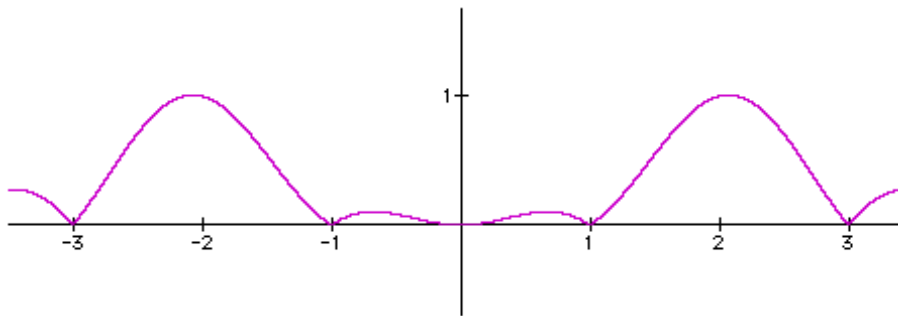


fig.4.6

Esercizio 5

Calcolare la trasformata di Fourier del segnale di fig. 5.1.

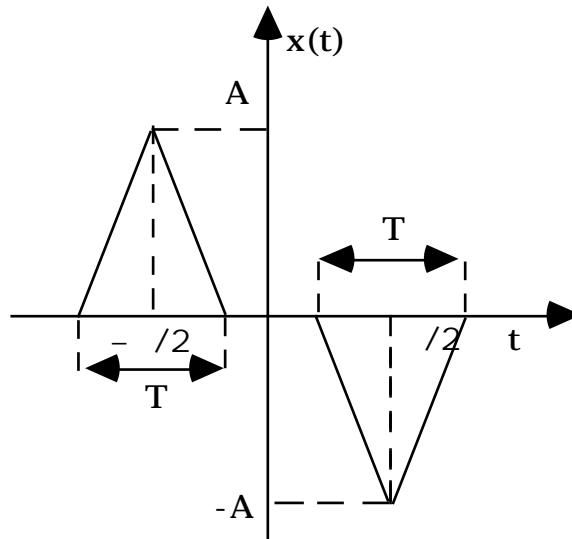


Fig.5.1

Si assume noto lo spettro dell'impulso triangolare di durata T (la cui base è perciò lunga $2T$). Esso è dato dalla equazione:

$$X(f) = A \operatorname{sinc}^2\left(\frac{fT}{2}\right)$$

Pertanto, tenendo conto della linearità della trasformata, si può scrivere:

$$X(f) = \frac{AT}{2} \operatorname{sinc}^2\left(\frac{fT}{2}\right) \left\{ e^{j\pi f T} - e^{-j\pi f T} \right\}$$

che può essere riscritta come:

$$X(f) = jAT \operatorname{sinc}^2\left(\frac{fT}{2}\right) \sin(\pi f T)$$

Lo spettro di ampiezza del segnale in esame è riportato nelle successive figure per $A = 2$, $T = 1$ e $T = 2$ e $7/2$ rispettivamente nei due casi.

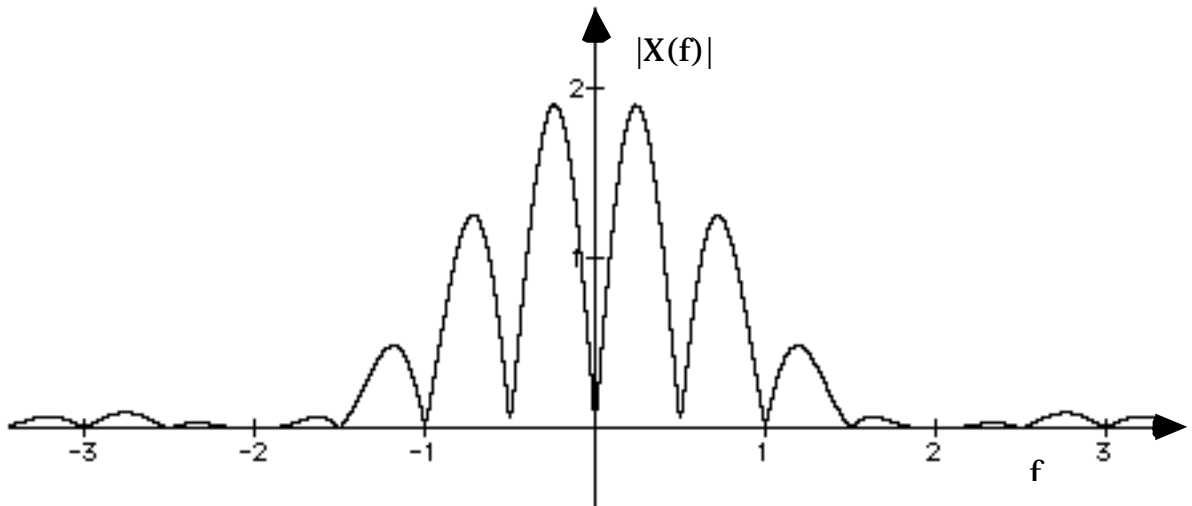


Fig.5.2

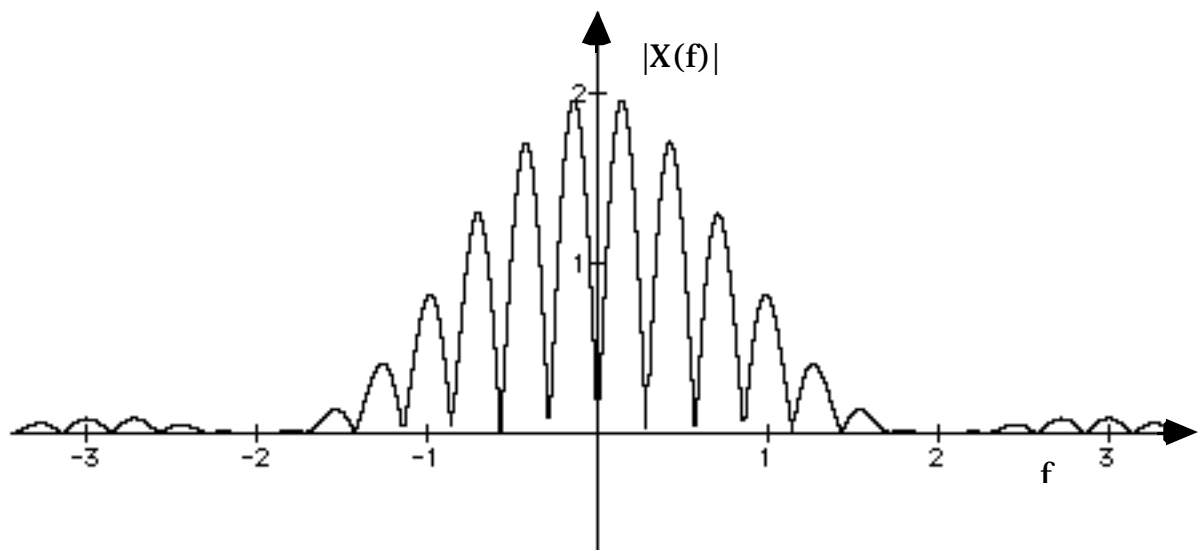


Fig.5.3

Esercizio 6

Calcolare la trasformata di Fourier del segnale:

$$x(t) = t e^{-|t|}$$

Essendo la funzione da trasformare dispari, il risultato della trasformazione deve essere una funzione immaginaria pura. Inoltre il valore nell'origine della trasformata deve essere 0, poichè l'area del segnale è nulla.

Si può scrivere:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} t e^{-|t|} e^{-j2\pi f t} dt$$

la cui integrazione non è immediata. Si dovrebbe dividere l'intervallo di integrazione in due sottointervalli $(-\infty, 0)$ e $(0, +\infty)$ e poi operare su ognuno di essi integrando per parti. Si può però ricorrere alle proprietà della derivazione, in particolare a quella secondo cui se è nota la coppia segnale-trasformata $[x(t), X(f)]$ allo spettro che si ottiene come derivata di $X(f)$ corrisponde il segnale in tempo $-j \frac{d}{df} x(t)$. Ne deriva pertanto che:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} ty(t)e^{-j2\pi ft} dt = \frac{1}{-j2\pi} \frac{d}{df} Y(f)$$

Nel caso specifico si ha:

$$y(t) = e^{-|t|}$$

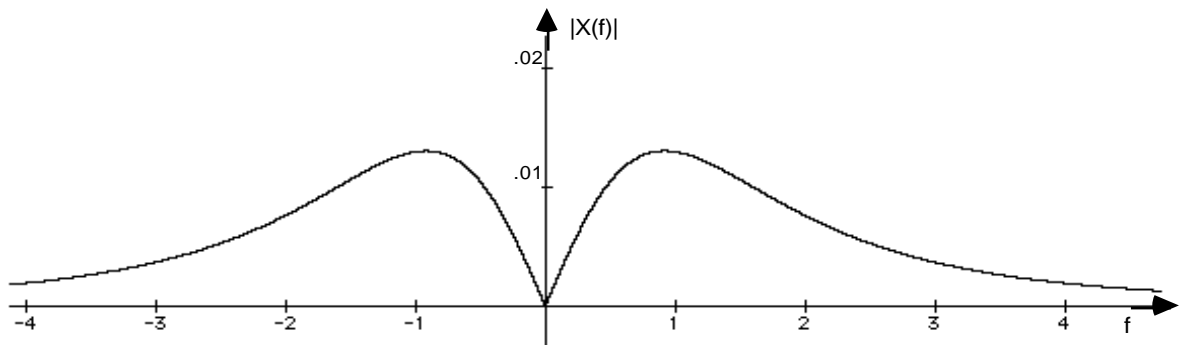
la cui trasformata vale:

$$Y(f) = \frac{2}{2 + (2\pi f)^2}$$

Allora:

$$\begin{aligned} X(f) &= \frac{1}{-j2\pi} \frac{d}{df} Y(f) = j \frac{1}{2\pi} \frac{d}{df} \frac{2}{2 + (2\pi f)^2} = j \frac{1}{s} \frac{d}{ds} \frac{2}{2 + s^2} \Big|_{s=2\pi f} = \\ &= -j \frac{8\pi f}{(2 + (2\pi f)^2)^2} \end{aligned}$$

E' facile verificare che si tratta di una funzione immaginaria pura e nulla nell'origine il cui modulo è riportato in figura con $\pi = 10$. La fase sarà $-\pi/2$ per frequenze positive e $\pi/2$ per frequenze negative.



Esercizio 7

Calcolare il segnale la cui trasformata di Fourier è data dalla funzione:

$$X(f) = (f-f_0)^2 \text{rect}_{2B}(f-f_0)$$

Il fatto che lo spettro sia centrato intorno alla frequenza f_0 rende immediato scrivere:

$$x(t) = a(t) e^{j2\pi f_0 t}$$

essendo $a(t)$ il segnale il cui spettro è:

$$A(f) = f^2 \text{rect}_{2B}(f)$$

Si può scrivere ancora per questo spettro, con semplici variazioni:

$$A(f) = -\frac{1}{4} (j2\pi f)^2 \text{rect}_{2B}(f)$$

la presenza nello spettro del quadrato del fattore $j2\pi f$ fa capire, tenendo conto delle proprietà della trasformata relativamente alle derivate, che $a(t)$ -antitrasformata di $A(f)$ - si ricava derivando due volte il segnale $b(t)$ il cui spettro è:

$$B(f) = -\frac{1}{4} \text{rect}_{2B}(f)$$

cioè:

$$b(t) = -\frac{2B}{4} \text{sinc}(2\pi Bt)$$

Allora:

$$\begin{aligned} a(t) &= -\frac{2B}{4} \frac{1}{t^2} \text{sinc}(2\pi Bt) = -2B^3 \frac{\text{sinc}(2\pi Bt)}{(2\pi Bt)^2} = \\ &= -2B^3 \frac{(2\pi Bt)\cos(2\pi Bt) - \sin(2\pi Bt)}{(2\pi Bt)^2} = \\ &= -2B^3 \frac{(2\pi Bt)^2 \sin(2\pi Bt) - 2(2\pi Bt)\cos(2\pi Bt) + 2\sin(2\pi Bt)}{(2\pi Bt)^3} = \\ &= 2B^3 \frac{2(2\pi Bt)\cos(2\pi Bt) - \sin(2\pi Bt)[2 - (2\pi Bt)^2]}{(2\pi Bt)^3} \end{aligned}$$

Questa quantità è reale e pari, come doveva essere essendo $A(f)$ reale e pari; moltiplicando questa espressione per l'esponenziale si ottiene il segnale cercato.

Esercizio 8

Calcolare l'andamento in tempo del segnale che ha la trasformata di figura 8.1

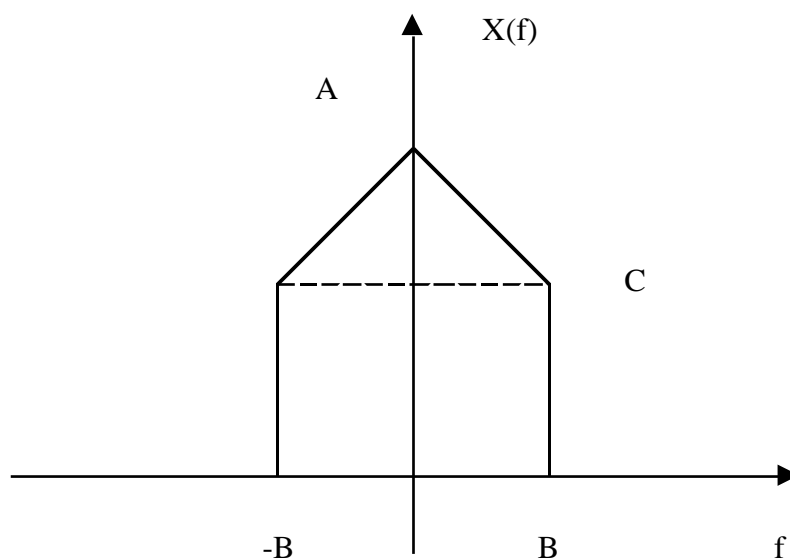


fig.8.1

Prima di procedere al calcolo dell'andamento del segnale bisogna osservare che lo spettro è reale e pari e tale deve essere anche il segnale.
Per eseguire il calcolo conviene derivare lo spettro ottenendo, quindi, lo spettro di figura.

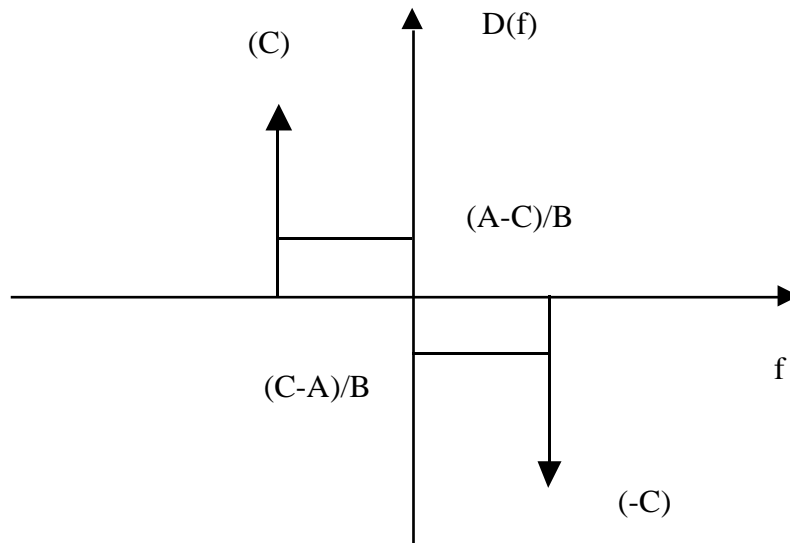


fig.8.2

che può essere facilmente antitrasformato, ricordando le regole della traslazione in frequenza. Si ha:

$$d(t) = (A - C)\text{sinc}(\pi Bt)e^{-j2\pi tB/2} - (A - C)\text{sinc}(\pi Bt)e^{+j2\pi tB/2} + Ce^{-j2\pi tB} - Ce^{+j2\pi tB}$$

che può essere riscritto come:

$$\begin{aligned} d(t) &= (A - C)\text{sinc}(\pi Bt)(e^{-j\pi tB} - e^{+j\pi tB}) + C(e^{-j2\pi tB} - e^{+j2\pi tB}) = \\ &= -2j(A - C)\text{sinc}(\pi Bt)\sin(\pi Bt) - 2jC\sin(2\pi Bt) \end{aligned}$$

Per compensare la derivazione dello spettro che si è effettuata e ottenere $x(t)$ bisogna dividere per $-j2\pi t$ ottenendo:

$$x(t) = \frac{(A - C)\text{sinc}(\pi Bt)\sin(\pi Bt)}{\pi t} + \frac{C \sin(2\pi Bt)}{\pi t}$$

che si può ancora scrivere come:

$$\begin{aligned} x(t) &= (A - C)B\text{sinc}(\pi Bt)\frac{\sin(\pi Bt)}{\pi Bt} + 2BC\frac{\sin(2\pi Bt)}{2\pi Bt} = \\ &= (A - C)B\text{sinc}^2(\pi Bt) + 2BC\text{sinc}(2\pi Bt) \end{aligned}$$

Nell'ultima espressione, reale e pari, è facile riconoscere la somma delle trasformate della parte rettangolare (di base $2B$ e altezza C) e di quella triangolare (di base $2B$ e altezza $A-C$).

Esercizio 9

Calcolare l'andamento in tempo del segnale che ha la trasformata di figura 9.1

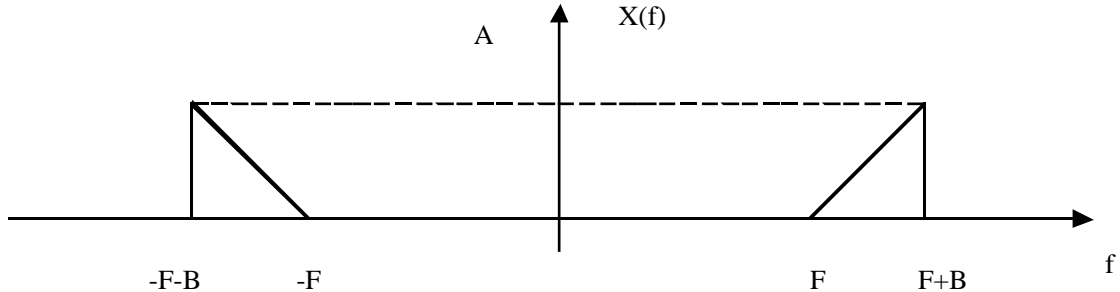


fig.9.1

Anche in questo caso lo spettro è reale e pari, pertanto il segnale $x(t)$ deve essere reale e pari.

Si procede come nel caso precedente derivando lo spettro.

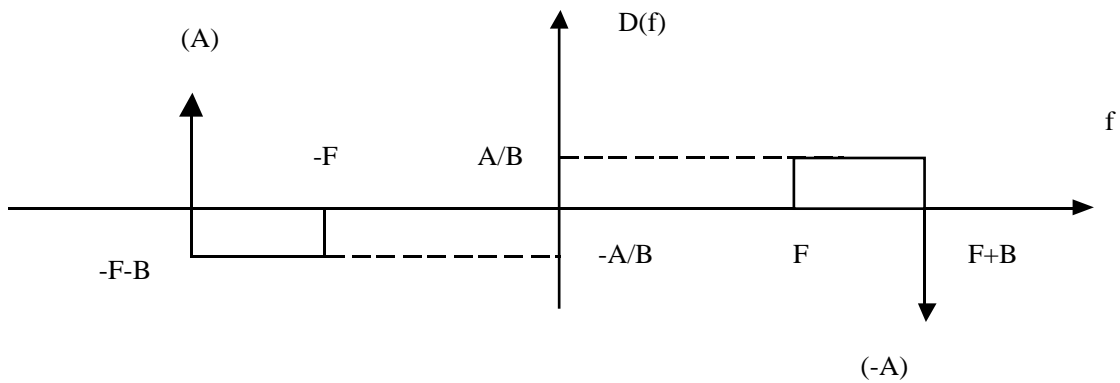


fig.9.2

Si può scrivere:

$$d(t) = -A \operatorname{sinc}(\pi B t) e^{-j2\pi(F+B/2)t} + A \operatorname{sinc}(\pi B t) e^{+j2\pi(F+B/2)t} + A e^{-j2\pi(F+B)t} - A e^{+j2\pi(F+B)t}$$

e ancora:

$$d(t) = 2jA \operatorname{sinc}(\pi B t) \sin(2\pi(F+B/2)t) - 2jA \sin(2\pi(F+B)t)$$

Per compensare la derivazione dello spettro che si è effettuata e ottenere $x(t)$ bisogna dividere per $-j2\pi t$ ottenendo:

$$x(t) = -A \operatorname{sinc}(\pi B t) \frac{\sin(2\pi(F+B/2)t)}{\pi t} + A \frac{\sin(2\pi(F+B)t)}{\pi t}$$

che si può scrivere:

$$x(t) = -2(F+B/2)A \operatorname{sinc}(\pi B t) \operatorname{sinc}(2\pi(F+B/2)t) + 2A(F+B) \operatorname{sinc}(2\pi(F+B)t)$$